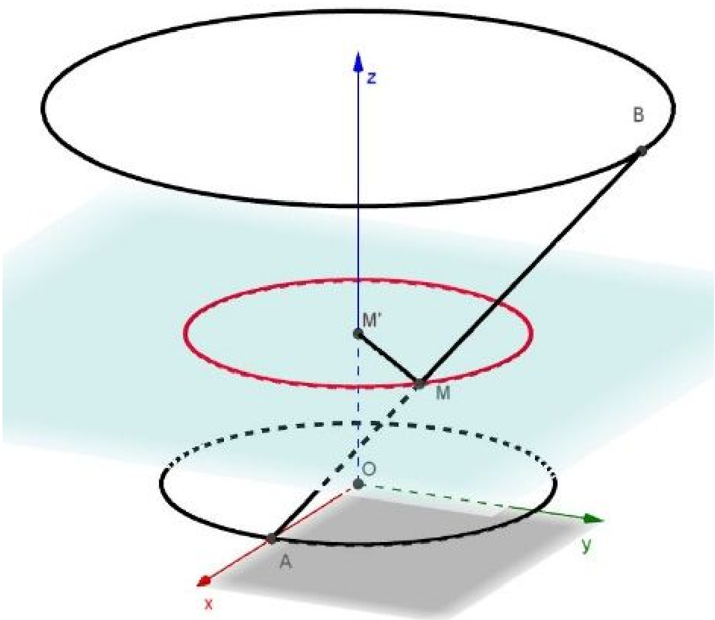
545-1 Château d'eau

Alain Bougeard (Les Lilas)



Le château d'eau étant rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ explicitement décrit sur la figure ci-contre, on choisit astucieusement une poutre d'acier [AB] avec A sur le cercle de base $(r,0,0)$ et B sur le cercle supérieur $(0,R,h)$ pour respecter la rotation de 90° (avec $r = d/2$ et $R = D/2$ pour simplifier les notations).

Un plan variable P, parallèle aux cercles, d'équation z=a, coupe l'axe des z au point $M' = (0,0,a)$ et la droite (AB) en$M = (x,y,a)$.

Pour calculer x et y il suffit d'exprimer $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}\; avec\; k = a/h,$ avec les composantes :

$$\begin{pmatrix} x-r \\ y-0 \\ a-0 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 0-r \\ R-0 \\ h-0 \end{pmatrix}$$

D'où le système $\begin{cases} x-r=-kr \\ y=kR \\ a=kh \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=r(1-k) & (1) \\ y=kR & (2) \\ a=a \end{cases}$

(1) et (2) vont nous permettre de calculer la distance MM' c'est-à-dire le rayon r' du cercle intersection entre l'hyperboloïde et le plan P.

$$r'^2 = r^2(1-k)^2 + (kR)^2 + (a-a)^2 = r^2 - 2kr^2 + r^2k^2 + k^2R^2 = k^2(R^2+r^2) - 2kr^2 + r^2 = f(k)$$

L'aire du cercle vaut donc $\pi r'^2$et le volume du château d'eau est fournie par l'intégrale de f lorsque a varie de 0 à h donc lorsque k varie de 0 à 1 (en appliquant la formule du changement de variable).

$$V = \pi\int_o^1 f(k)hdk = \pi h\left[\frac{k^3}{3}(R^2+r^2) - 2\frac{k^2}{2}r^2 + r^2k\right]_0^1 = \pi h\left(\frac{R^2+r^2}{3} - r^2 + r^2\right) = \frac{\pi h.}{3}(R^2+r^2)$$

Soit en exprimant en fonction des données D, d et h

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{12}(D^2+d^2)}$$