545-2: Trouvé sur la toile

De l'hypothèse $xy + xz + yz = 0$ on tire $xy = -xz - yz$ (1)

Pour la quantité $\sigma = \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{z+y}{x}$ on réduit au même dénominateur (xyz) et l'on multiplie les deux membres par ce dénominateur. On obtient:

$xyz\,\sigma = (x+y)yx + (x+z)xz + (z+y)yz$, on utilise alors la relation (1) puis on développe

$xyz\,\sigma = (x+y)(-xz-yz) + (x+z)xz + (z+y)zy = -x^2z - xyz - xyz - y^2z + y^2z + x^2z + xz^2 + yz^2 + y^2z$

$xyz\,\sigma = -2xyz + xz^2 + yz^2 = -2xyz + z(xy+yz) = -2xyz + z(xy) = -3xyz$ en utilisant la relation (1)

En divisant chaque membre par xyz, non nul d'après l'énoncé, on obtient

$$\boxed{\sigma = -3}$$

Pas très difficile mais je regrette de n'avoir pas su exploiter dans la démonstration l'invariance par permutation circulaire des formules proposées dans l'énoncé.

Alain Bougeard (Les Lilas)