Mais en fait seul l'équation de l'hyperbole nous intéresse. Détaillons le calcul :

$$\left.\begin{array}{l} -d\cos t = \lambda(d\cos t + D\sin t) \\ y - d\sin t = \lambda(d\sin t - D\cos t) \\ z = -\lambda h \end{array}\right\} \text{soit} \left\{\begin{array}{l} -dh\cos t = -z(d\cos t + D\sin t) \\ h(y - d\sin t) = -z(d\sin t - D\cos t) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (dz - dh)\cos t + Dz\sin t = 0 \\ -Dz\cos t + \sin t(-hd + zd) = -hy \end{array}\right.$$ en effectuant des combinaisons linéaires

on obtient $\left\{\begin{array}{l} (\sin t)\left[D^2z^2 + (zd - hd)^2\right] = -hy(dz - dh) \\ (\cos t)\left[D^2z^2 + (dz - dh)^2\right] = Dhyz. \end{array}\right.$

En faisant la somme des carrés des équations puis simplifiant par $\left[D^2z^2 + d^2(z-h)^2\right]$ on a :

$\boxed{D^2z^2 + d^2(z-h)^2 = h^2y^2}$ qui est donc l'équation de l'hyperbole.

Alors $$V = \int_0^h \pi y^2\,dz = \frac{\pi}{h^2}\int_0^h \left[D^2z^2 + d^2(z-h)^2\right]dz$$

qui donne $\boxed{V = \frac{\pi h}{3}(D^2 + d^2)}$

Remarque $V = \frac{h}{3}\left[\pi D^2 + \pi d^2\right]$ et πD^2 et πd^2 sont les aires des petits et grand cercle. Et on retrouve le $\frac{1}{3}$ qui revient souvent dans ce genre de calcul : volume de la pyramide, tronc de cône ... etc ....