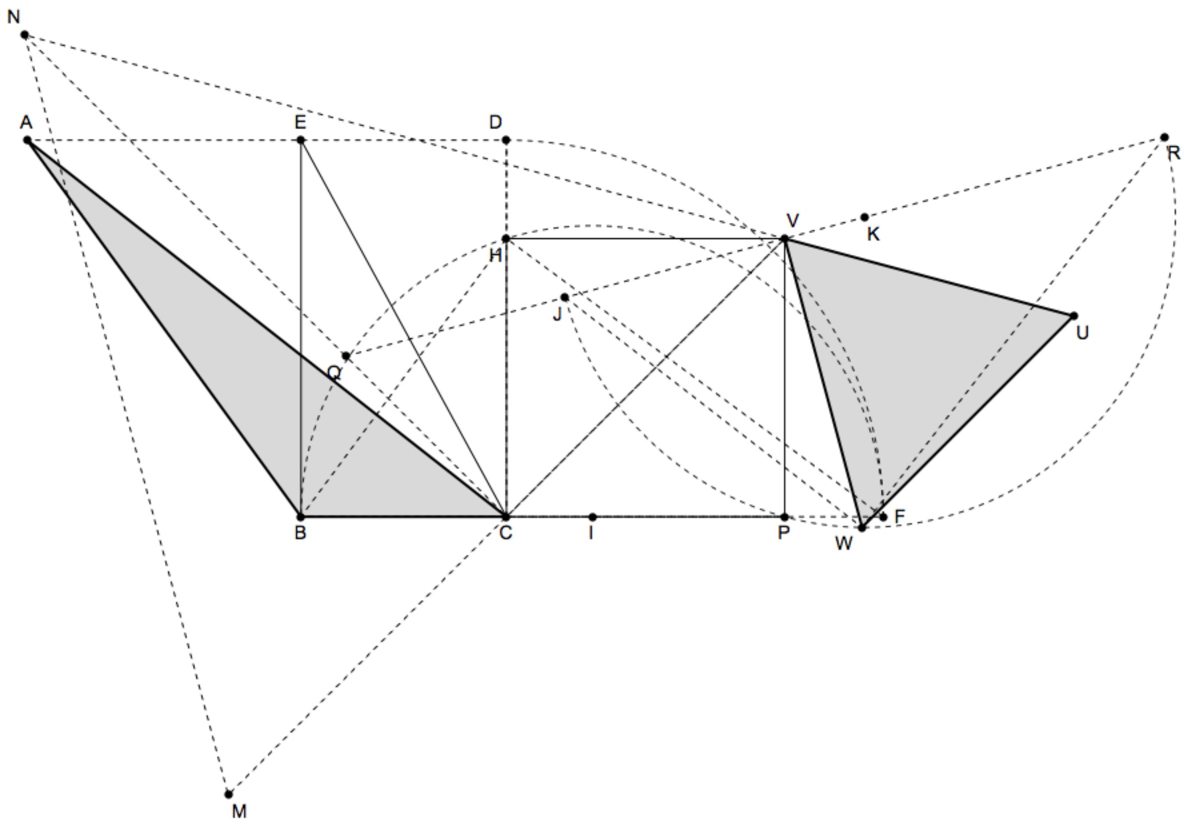
I. Énoncé.

Soit (ABC) un triangle quelconque non aplati d'aire $\mathcal{S}$, construire à la règle (non graduée) et au compas un triangle équilatéral d'aire $\mathcal{S}$.



II. Construction.

Il faut construire un triangle équilatéral de côté de longueur c et d'aire $\mathcal{S} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Donc $c = \frac{2\sqrt{\mathcal{S}}}{\sqrt[4]{3}}$

Les étapes ci-dessous ne nécessitent que des constructions de parallèles d'orthogonalité, de milieu, de centre de gravité, d'intersections de droites et/ou de cercles. Elles sont toutes réalisables à la règle et au compas.

1. E est tel que $(AE) /\!/ (BC)$ et $(EB) \perp (BC)$. (EBC) est donc un triangle rectangle en B d'aire $\mathcal{S}$. D est tel que $(BCDE)$ soit un rectangle d'aire $2\mathcal{S}$.

2. Avec $CF = CD$, C entre B et F, on construit H intersection d'un demi-cercle de diamètre $[BF]$ (de centre I) et de la perpendiculaire en C à (BC).

Le triangle (BHF) est rectangle en H et $CH^2 = CB.CF = 2\mathcal{S}$. On a donc $CH = \sqrt{2\mathcal{S}}$.

3. V est tel que $(CHVP)$ soit un carré il a la même aire $2\mathcal{S}$ que le rectangle $(BCDE)$. La longueur du côté du carré est $CH = HV = VP = PC = \sqrt{2\mathcal{S}}$.

La diagonale de ce carré a pour longueur $CV = 2\sqrt{\mathcal{S}}$.

4. M est le symétrique de V par rapport à C. Le point N est tel que (VMN) soit un triangle équilatéral de côté de longueur $VM = MN = NV = 4\sqrt{\mathcal{S}}$.

(NC) est une médiane de (VMN) de longueur $NC = 2\sqrt{3\mathcal{S}}$. Soit Q le centre de gravité de (VMN), intersection des médianes, on a alors $CQ = \frac{2\sqrt{3\mathcal{S}}}{3}$

5. Le triangle (CVQ) est rectangle en Q donc $VQ^2 = CV^2 + CQ^2 = 4\mathcal{S} + \frac{4\mathcal{S}}{3} = \frac{16\mathcal{S}}{3}$. Donc $VQ = \frac{4\sqrt{\mathcal{S}}}{\sqrt{3}}$.

6. J est le milieu de $[VQ]$. On a $VJ = \frac{2\sqrt{\mathcal{S}}}{\sqrt{3}}$. R est le point de (VJ) tel que $RV = CV = 2\sqrt{\mathcal{S}}$, avec V entre J et R.

Le point W est l'intersection du demi-cercle de diamètre $[JR]$ (de centre K) et de la perpendiculaire à (JR) en$V$.

Le triangle (JWR) est rectangle en W donc $VW^2 = VJ.VR = \frac{2\sqrt{\mathcal{S}}}{\sqrt{3}} 2\sqrt{\mathcal{S}} = \frac{4\mathcal{S}}{\sqrt{3}}$. Donc $VW = \frac{2\sqrt{\mathcal{S}}}{\sqrt[4]{3}} = c$.

Il suffit donc de construire U avec $UV = VW = WU = \frac{2\sqrt{\mathcal{S}}}{\sqrt[4]{3}} = c$. Le triangle (UVW) est équilatéral d'aire $\mathcal{S}$.