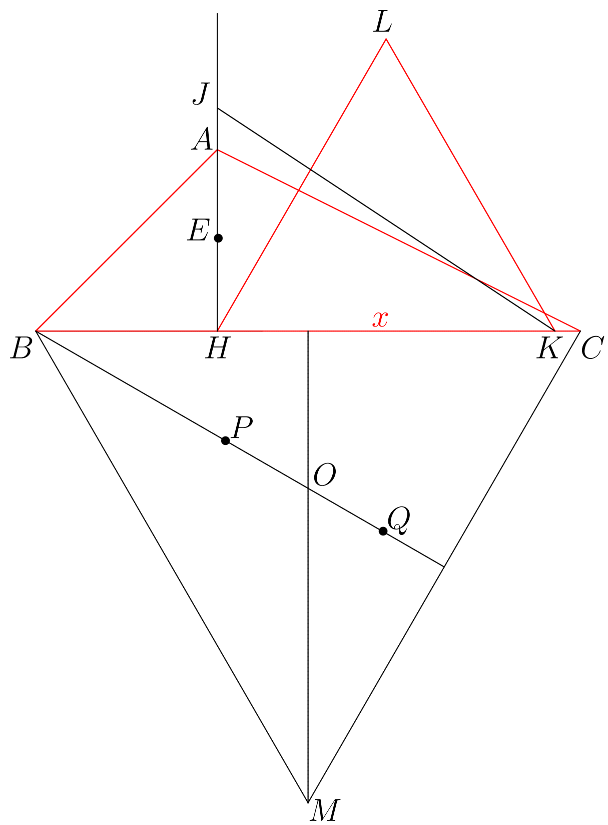
545-3. Inspiré par l'exercice 543-1.

On considère un triangle ABC d'aire $\mathcal{S}$; nous allons construire, à la règle et au compas, un triangle équilatéral HLK de même aire $\mathcal{S}$.



(I) Analyse du problème.

On dispose des points A, B, C et, par exemple, aussi des longueurs $a = BC$ et $c = AB$. On désigne par h la longueur de la hauteur AH issue de A ; alors

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}ah\cdot$$

Soit x la longueur du côté du triangle équilatéral de même aire $\mathcal{S}$; alors

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\,x\,\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot$$

On doit donc construire un segment de longueur x, avec

$$x^2 = \frac{2ah}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}h = \ell h,$$

où $\ell = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; alors ℓ est la longueur du diamètre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté a.

Les longueurs h et ℓ sont constructibles et on construit $x = \sqrt{\ell h}$ grâce à l'identité

$$\Big(\frac{\ell + h}{2}\Big)^2 = \Big(\frac{\ell - h}{2}\Big)^2 + \big(\sqrt{\ell h}\big)^2.$$

(II) Construction du triangle équilatéral (avec, par exemple, $\ell > h$).
Pour ne pas alourdir la figure, les cercles intermédiaires ne sont pas tracés.

(a) *Construction de la perpendiculaire AH menée de A sur (BC) :*
Le cercle (A, c) recoupe (BC) en B_1 ; les cercles (B, c) et (B_1, c) se recoupent en A_1 ; la droite (AA_1) coupe (BC) en H, ce qui donne $h = AH$.

(b) *On construit le triangle équilatéral BMC et on détermine le centre O de son cercle circonscrit :*
Les cercles (B, a) et (C, a) se coupent en M et M_1 ; le triangle BMC est équilatéral et MM_1 est la médiatrice de $[BC]$. Le cercle (M, a) recoupe le cercle (C, a) en C_1 ; alors la droite (BC_1) est la médiatrice de $[MC]$.
Les droites (MM_1) et (BC_1) se coupent en O, centre du cercle circonscrit au triangle BMC ; on a donc $OB = \dfrac{\ell}{2}\cdot$

(c) *On construit le milieu E de $[AH]$:*
Les cercles (A, h) et (B, h) se coupent en H_1 et H_2 ; la droite (H_1H_2) coupe $[AH]$ en son milieu E et $HE = \dfrac{h}{2}\cdot$

(d) *Sur la droite (OB), on place les points P et Q tels que $OP = OQ = \dfrac{h}{2}$:*
Le cercle (O, HE) coupe la droite (OB) en P et Q ; on a alors
$$BP = \frac{\ell - h}{2} \text{ et } BQ = \frac{\ell + h}{2}\cdot$$

(e) *Construction d'un point K de (BC) tel que $HK = x$:*
Pour construire la longueur x, on a besoin d'un angle droit et on utilise $\widehat{AHC}$.
– Le cercle (H, BP) coupe la demi-droite $[HA)$ en J ; on a donc $HJ = BP$.
– Le cercle (J, BQ) coupe $[BC]$ en K ; on a donc $JK = BQ$.
Il en résulte que dans le triangle rectangle JHK, on a
$$HK^2 = JK^2 - JH^2 = \left(\frac{\ell + h}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell - h}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\ell h}\right)^2$$
et $HK = x$.

(f) *On construit le triangle équilatéral HLK :*
Les cercles (H, x) et (K, x) se coupent en L ; le triangle cherché est le triangle HLK.

Marie-Nicole Gras