

Exercice 545 1

Pour l'hyperboloïde à une nappe qui modélise le bord du château d'eau de hauteur h et de rayon de base a et de rayon b en haut, on utilise la paramétrisation.

$$\begin{cases} x = (1-v)a \cos u - vb \sin u \\ y = (1-v)a \sin u + vb \cos u \\ z = vh \end{cases}$$

On a $x^2 + y^2 = ((1-v)a \cos u - vb \sin u)^2 + ((1-v)a \sin u + vb \cos u)^2$

$$x^2 = (1-v)^2 a^2 \cos^2 u + v^2 b^2 \sin^2 u - 2(1-v)abv \cos u \sin u$$

$$y^2 = (1-v)^2 a^2 \sin^2 u + v^2 b^2 \cos^2 u + 2(1-v)abv \cos u \sin u$$

donc $x^2 + y^2 = (1-v)^2 a^2 + v^2 b^2$

On calcule le volume

$$V = \pi h \int_0^1 x^2 + y^2 du = \pi h \int_0^1 (v-1)^2 a^2 + v^2 b^2 du = \pi h \left[\frac{1}{3} (v-1)^3 a^2 + \frac{1}{3} v^3 b^2 \right]_0^1 = \pi h \left(\frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) = \frac{\pi h}{3} (a^2 + b^2)$$