Exercice 545 2

On considère les triplés (x, y, z) avec aucune des coordonnées nulles tels que $xy + xz + yz = 0$.

Si un tel triplé existe alors le triplé (kx, ky, kz) avec $k \neq 0$ vérifie aussi

$kxky + kxkz + kykz = k^2(xy + xz + yz) = k^2 \times 0 = 0$

Pour ces raisons d'homogénéité on peut choisir $z = 1$ et $xy + x + y = 0$ soit $y(1 + x) + x = 0$ donc $x \neq -1$ et $y = \dfrac{-x}{x+1}$

Puisque $\dfrac{kx+ky}{kz} + \dfrac{kx+kz}{ky} + \dfrac{ky+kz}{kx} = \dfrac{k(x+y)}{kz} + \dfrac{k(x+z)}{ky} + \dfrac{k(y+z)}{kx} = \dfrac{x+y}{z} + \dfrac{x+z}{y} + \dfrac{y+z}{x}$,

on a alors $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{x+z}{y} + \dfrac{y+z}{x} = \dfrac{x + \dfrac{-x}{x+1}}{1} + \dfrac{x+1}{\dfrac{-x}{x+1}} + \dfrac{\dfrac{-x}{x+1} + 1}{x} = \dfrac{x^2 + x - x}{x+1} + \dfrac{(x+1)^2}{-x} + \dfrac{-x + x + 1}{x(x+1)}$

donc

$$\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} = \frac{x^2}{x+1} - \frac{(x+1)^2}{x} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x^3 - (x+1)^3 + 1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - (x+1)^3}{x(x+1)}$$

$$\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} = \frac{(x+1)\left((x^2 - x + 1) - (x+1)^2\right)}{x(x+1)} = \frac{x^2 - x + 1 - x^2 - 2x - 1}{x} = \frac{-3x}{x} = -3$$