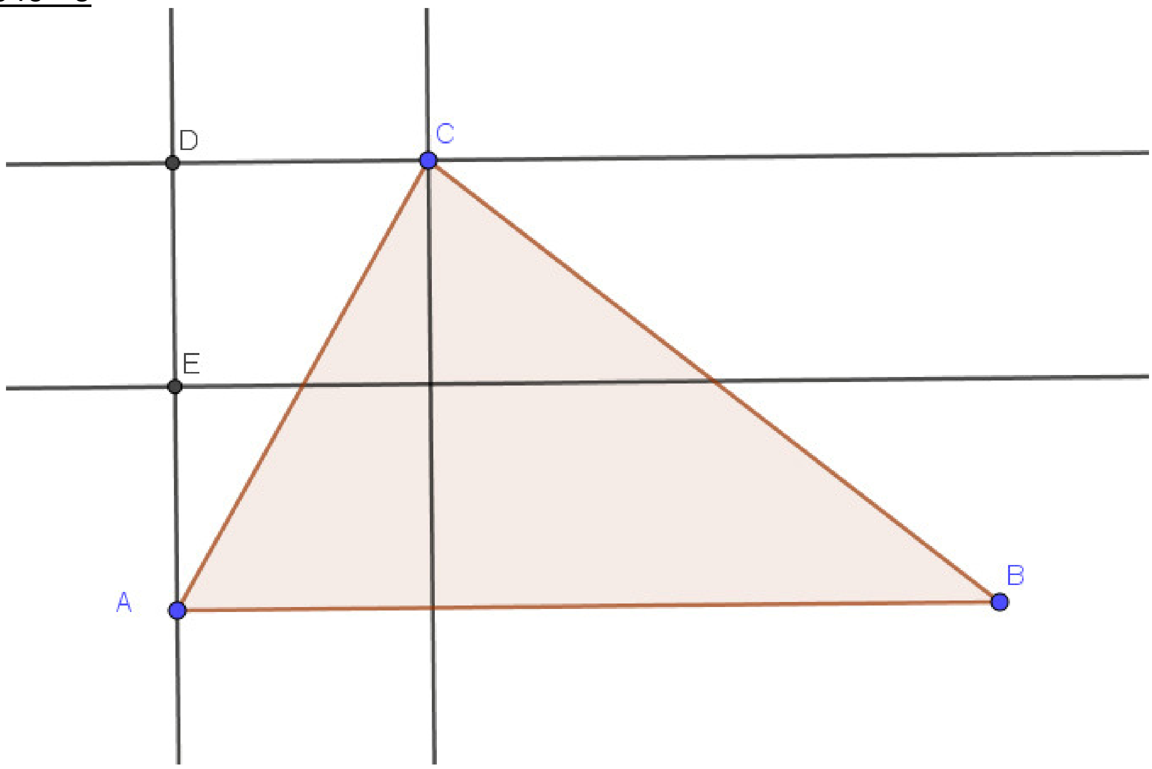
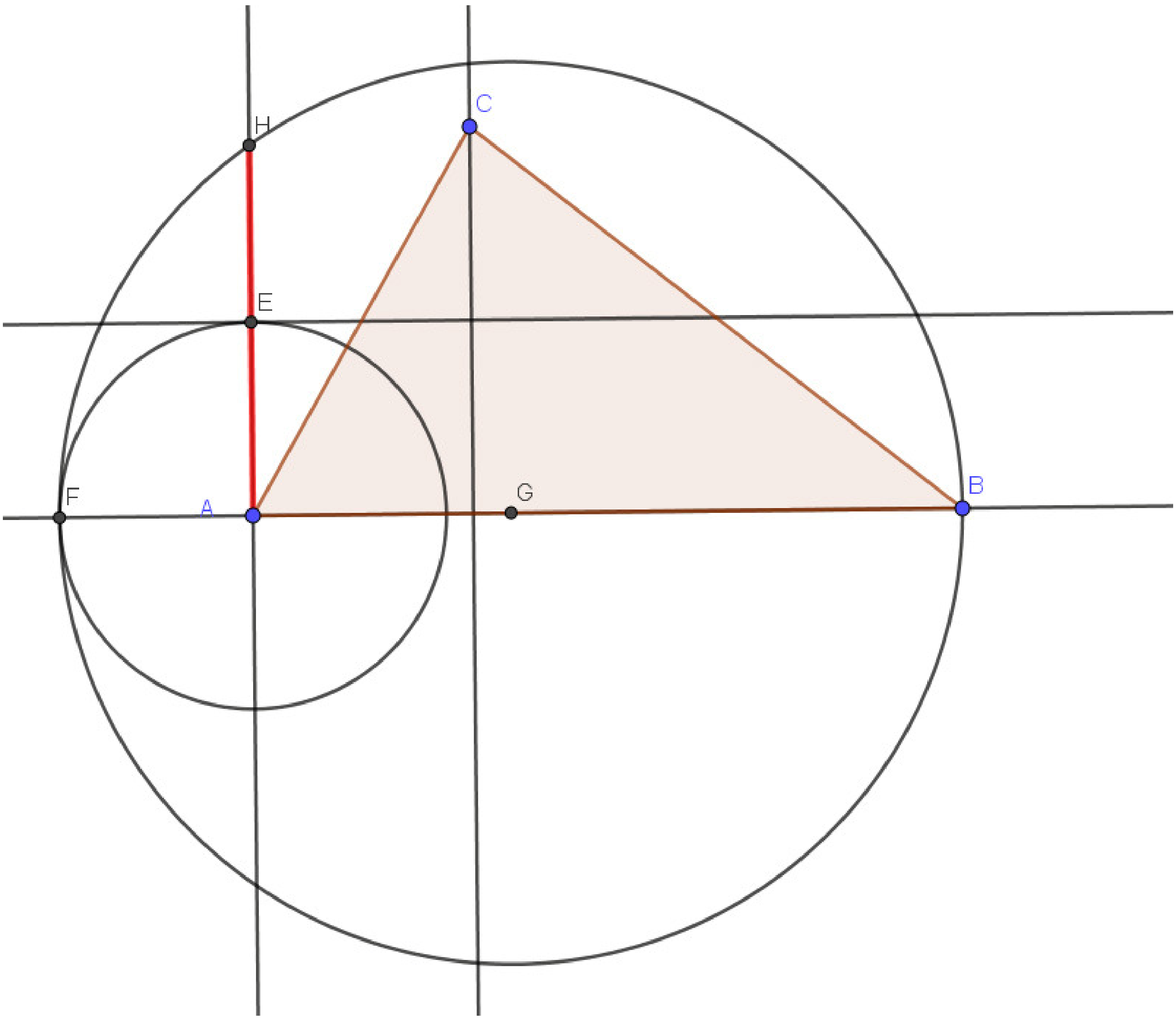
Exercice 545 - 3



On part du triangle ABC, on trace le point D intersection de la parallèle à (AB) passant par C et par la perpendiculaire à (AB) passant par A. E est le milieu de [AD].
ABD et ABC ont la même aire.



Classiquement on trace AH tel que $AH^2 = S = aire(ABC)$.

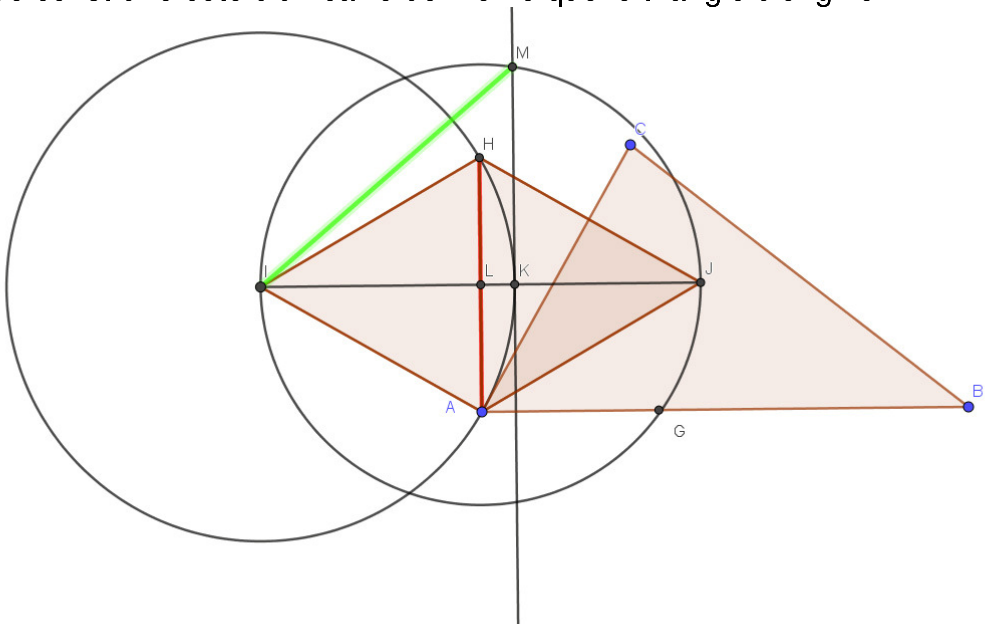
AF=AE et G est le milieu de [FB]. On a $FH^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 + AH^2$, $HB^2 = HA^2 + AB^2$,

$FB^2 = FH^2 + HB^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 + AH^2 + AH^2 + AB^2 = 2AH^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2 + AB^2$ or

$FB^2 = \left(\frac{AD}{2} + AB\right)^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 + AD \times AB + AB^2$ donc $2AH^2 = AD \times AB$ soit

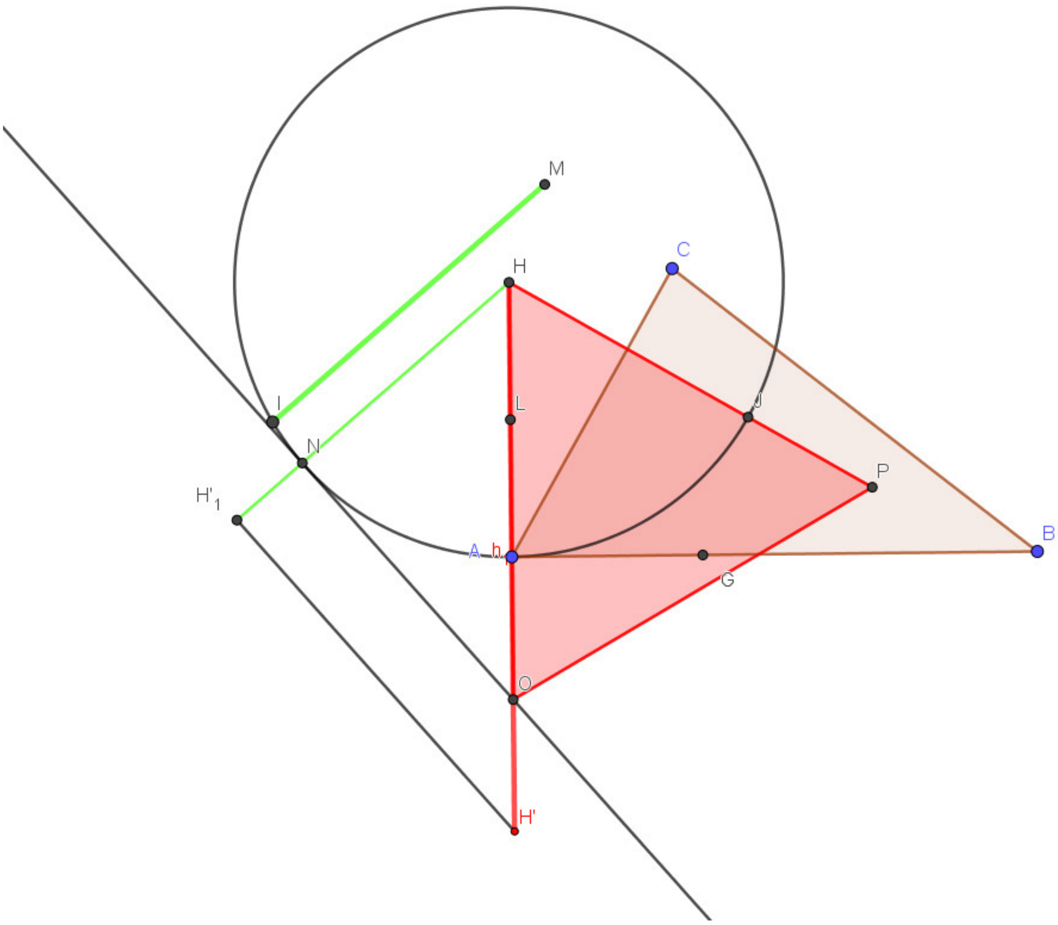
$AH^2 = \frac{AD \times AB}{2} = S = aire(ABC)$.

On vient donc de construire coté d'un carré de même que le triangle d'origine



On construit les triangles équilatéraux AHI et AHJ. $IJ = AH\sqrt{3}$.

On a $cos(\hat{I}) = \frac{IK}{IM} = \frac{IM}{IJ}$ donc $IM^2 = IK \times IJ = AH \times AH \times \sqrt{3}$ et $IM = AH \times \sqrt{\sqrt{3}}$



On trace H', N et H'$_1$ tel que $HH'_1 = IM = AH \times \sqrt{\sqrt{3}}$ et $HN = AH$, $HH' = 2AH$, $(H'H'_1)$ et (NO) sont parallèles.
On applique le théorème de Thalès
$\frac{HN}{HH'_1} = \frac{HO}{HH'}$ donc $HO = \frac{HN}{HH'_1} \times HH' = \frac{AH}{AH\sqrt{\sqrt{3}}} \times 2AH = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}} AH$
on construit P tel que HOP est équilatéral
$$aire(HOP) = HO^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}} AH\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times AH^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = AH^2 = aire(ABC)$$
On a bien construit un triangle équilatéral de même aire qu'un triangle donné.