

Exercice 545 - 4

On se place dans un repère orthonormé l'équation de l'ellipse de centre O est donné par

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On va utiliser la fonction définie sur $[0; a]$ par $f(x) = 4x \times b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ qui représente l'aire du rectangle inscrit dans l'ellipse.

$$f'(x) = 4 \times b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + 4bx \times \frac{-\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = 4b \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + x \frac{-\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right) = 4b \left(\frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right) = 4b \left(\frac{a^2 - 2x^2}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right)$$

la fonction est donc maximale pour $a^2 - 2x^2 = 0$ soit $2x^2 = a^2$ donc $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

On a l'aire maximale

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 4 \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times b \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{a^2}} = 4 \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times b \sqrt{1 - \frac{a^2}{2a^2}} = 4 \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times b \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 4 \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times b \sqrt{\frac{1}{2}} = 2ab$$

L'aire de l'ellipse est πab , pour faire un disque de même aire il faut son rayon R^2 vérifie $\pi ab = \pi R^2$.
On a donc $ab = R^2$.

Pour les mêmes raisons que pour l'ellipse en prenant $a = b$, le plus grand rectangle inscrit dans le disque est le carré de coté $R\sqrt{2}$. Son aire vaut $2R^2$, mais comme $ab = R^2$, l'aire du plus grand rectangle d'une ellipse est égale au plus rectangle dans le cercle de même aire.

- a = 2.6
- b = 1.1
- $f(x) = 1.1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{2.6^2}}$
- x = t
- $f_1: y = -\left(1.1 \sqrt{1 - \frac{t^2}{2.6^2}}\right)$
- O = (0, 0)
- c: $x^2 + y^2 = 2.86$
- A = (1.84, 0.78)
- A' = (-1.84, 0.78)
- A'' = (-1.84, -0.78)
- A''' = (1.84, -0.78)
- a''' = 1.56
- a'' = 3.68
- a' = 1.56
- a₁ = 3.68
- q1 = 5.72
- h: $-0.71x - 0.71y = 0$
- g: $-0.71x + 0.71y = 0$
- B = (1.2, 1.2)
- C = (-1.2, 1.2)
- D = (-1.2, -1.2)
- E = (1.2, -1.2)
- e = 2.39
- d = 2.39
- c₁ = 2.39
- b₁ = 2.39
- q2 = 5.72
- 2 ab = 5.72

