**Problème 545-4**

**Aire du carré inscrit dans un cercle de rayon *R***

L'aire d'un disque de rayon $R$ est donnée par : $A_D = \pi R^2$ (1)

Le côté du carré inscrit dans ce disque est $\sqrt{2} R$ , et l'aire de ce carré : $A_C = 2R^2$ (2)

**Aire du plus grand rectangle inscrit dans une ellipse**

On considère une ellipse dont le grand axe a pour longueur $2a$ et le petit axe $2b$.
Dans un repère orthonormé où le grand axe est placé sur l'axe des abscisses, l'équation de l'ellipse est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (3)

L'aire de l'ellipse est donnée par : $A_E = \pi a b$ (4)

D'après (3), un point $M(x;y)$ de l'ellipse a pour coordonnées : $M\left(x\,;b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$ (5)

L'aire du rectangle inscrit dans l'ellipse a donc pour aire : $A_R = 4xy = 4bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (6)

En dérivant cette aire par rapport à $x$, on obtient :

$$\frac{d\,A_R}{d\,x} = 4b\frac{1-\frac{2x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \qquad (7)$$

L'aire du rectangle est maximale lorsque cette dérivée s'annule pour : $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (8)

À partir de cette valeur de $x$, et de l'expression (6), on obtient l'aire du plus grand rectangle :

$$A_R = 2ab \qquad (9)$$

**Comparaison des aires**

D'après (1) et (4), les aires $A_D$ et $A_E$ sont égales pour $R^2 = ab$ (10)

D'après (9) et (10), en comparant avec (2), on en conclut que l'aire du carré et du plus grand rectangle sont donc égales.