**545-1 Château d'eau**

On utilise un repère orthonormé dans lequel l'hyperboloïde de révolution à une nappe possède l'équation réduite suivante :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Soients $r=\frac{d}{2}$ et $R=\frac{D}{2}$ les rayons des cercles inférieurs et supérieurs.

Soients $z=u<0$ et $z=v>0$ les équations des plans contenant les cercles inférieurs et supérieurs.

$$\begin{cases}\frac{r^2}{a^2}-\frac{u^2}{c^2}=1\\ \frac{R^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}=1\end{cases} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases}u=-\frac{c}{a}\cdot\sqrt{r^2-a^2}\\ v=\frac{c}{a}\cdot\sqrt{R^2-a^2}\end{cases} \quad \text{et} \quad h=v-u=\frac{c}{a}\cdot\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)$$

**1) Calcul de a et c**

L'hyperboloïde contient deux familles de droites $(\Delta_\lambda)_{\lambda\in R}$ et $(\Delta'_\lambda)_{\lambda\in R}$

Les droites $\Delta_\lambda$ sont définies par le système :
$$\begin{cases}\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\cdot\left(1+\frac{x}{a}\right)\\ \frac{y}{a}-\frac{z}{c}=\lambda^{-1}\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)\end{cases}$$

Les droites $\Delta'_\lambda$ sont définies par le système :
$$\begin{cases}\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\cdot\left(1-\frac{x}{a}\right)\\ \frac{y}{a}-\frac{z}{c}=\lambda^{-1}\cdot\left(1+\frac{x}{a}\right)\end{cases}$$

Soient A le point du cercle inférieur et B le point du cercle supérieur, de coordonnées :

$$A\left|\begin{matrix} r \\ 0 \\ u \end{matrix}\right. \qquad\qquad B\left|\begin{matrix} 0 \\ R \\ v \end{matrix}\right.$$

La condition de rotation du cercle supérieur par rapport au cercle inférieur implique que l'une des droites de l'hyperboloïde passe par A et B.

S'il s'agit d'une droite $\Delta_\lambda$, alors : $\begin{cases} \dfrac{u}{c} = \lambda \cdot \left(1 + \dfrac{r}{a}\right) \\ \dfrac{R}{a} + \dfrac{v}{c} = \lambda \end{cases}$

C'est impossible puisque $\lambda$ serait à la fois strictement négatif et strictement positif

Il s'agit donc d'une droite $\Delta'_\lambda$ et : $\begin{cases} \dfrac{u}{c} = \lambda \cdot \left(1 - \dfrac{r}{a}\right) \\ \dfrac{R}{a} + \dfrac{v}{c} = \lambda \end{cases}$

On en déduit : $$\frac{u}{c} = \left(\frac{R}{a} + \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 - \frac{r}{a}\right) \qquad \text{(E)}$$

On remplace, dans (E), u et v en fonction de r, R, a, c et après deux élévations aux carrés membre à membre, on obtient :

$$a = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}$$

La formule donnant h ci-dessus permet d'obtenir : $c = \dfrac{R \cdot r \cdot h}{R^2 + r^2}$

## 2) Calcul du volume

L’intersection de l’hyperboloïde et d’un plan horizontal, de cote z, est un cercle dont la carré du rayon est : $1+\frac{z^2}{c^2}$.

L’aire du disque délimité par ce cercle est : $\pi\cdot\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$

Le volume cherché est donc : $V=\pi\cdot a^2\cdot\int_u^{u+h}\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)\cdot dz$

On obtient : $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{h\cdot\left(2\cdot R^2\cdot r^2+h^2\cdot(R^2+r^2)\right)}{R^2+r^2}$