545-4 Equarrissage des bois

1) Parallélogrammes, d'aire maximale, inscrits dans un cercle

Les parallélogrammes inscrits dans un cercle sont des rectangles car deux côtés parallèles à une direction Δ, de même longueur, sont symétriques par rapport au diamètre de direction de direction Δ.

On choisit le rayon du cercle comme unité de longueur et un repère orthonormé dont l'axe des x a la direction Δ.

L'aire du cercle est égale à π.

Les sommets A, B, C, D du rectangle ont pour coordonnées :

$$A\left|\begin{array}{l}\cos\theta\\ \sin\theta\end{array}\right.\qquad B\left|\begin{array}{l}-\cos\theta\\ \sin\theta\end{array}\right.\qquad C\left|\begin{array}{l}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{array}\right.\qquad D\left|\begin{array}{l}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{array}\right.$$

L'aire du rectangle est égale à : $4\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta = 2\cdot\sin 2\theta$

L'aire est maximale pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, ce qui correspond au cas où le rectangle est un carré

2) Parallélogrammes, d'aire maximale, inscrits dans une ellipse

On peut transformer une ellipse en un cercle de même aire par une application affine f de déterminant 1.

L'application f transforme les parallélogrammes inscrits dans l'ellipse en les parallélogrammes, de même aire, inscrits dans le cercle.

L'aire maximale pour un parallélogramme inscrit dans l'ellipse est donc 2 comme pour le cercle.

Il existe un rectangle inscrit dans l'ellipse qui possède cette aire maximale.

En effet on choisit le repère orthonormé dans lequel l'ellipse a l'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

L'aire de l'ellipse est égale à : $\pi \cdot ab = \pi$

Soit ABCD rectangle dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A\left|\begin{array}{l}\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\[2ex] \dfrac{b}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \qquad B\left|\begin{array}{l}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\[2ex] \dfrac{b}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \qquad C\left|\begin{array}{l}-\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\[2ex] -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\end{array}\right. \qquad D\left|\begin{array}{l}\dfrac{a}{\sqrt{2}}\\[2ex] -\dfrac{b}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

Ce rectangle est inscrit dans l'ellipse et son aire est égale à : $2ab = 2$