

## 545–2 Trouvé sur la toile

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois réels, tous différents de 0, vérifiant :

$$xy + xz + yz = 0.$$

Que vaut  $\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x}$  ?

Solution :

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois réels, tous différents de 0, vérifiant :

$$xy + xz + yz = 0.$$

\* En divisant chaque membre de l'égalité  $xy + xz + yz = 0$  par le réel non nul  $xy$ , on obtient :

$$1 + \frac{xz}{xy} + \frac{yz}{xy} = 0,$$

Soit :

$$1 + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} = 0.$$

Ou encore :

$$\frac{z}{y} + \frac{z}{x} = -1.$$

\* En divisant par  $xz$  puis  $yz$ , on obtient de même :

$$\frac{y}{z} + \frac{y}{x} = -1, \text{ et } \frac{x}{z} + \frac{x}{y} = -1.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} &= \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \\ &= \underbrace{\left(\frac{z}{y} + \frac{z}{x}\right)}_{=-1} + \underbrace{\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right)}_{=-1} + \underbrace{\left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y}\right)}_{=-1} \\ &= -3. \end{aligned}$$