

545–2 Trouvé sur la toile

Soient x , y et z trois réels, tous différents de 0, vérifiant :

$$xy + xz + yz = 0.$$

Que vaut $\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x}$?

Solution :

Soient x , y et z trois réels, tous différents de 0, vérifiant :

$$xy + xz + yz = 0.$$

* En divisant chaque membre de l'égalité $xy + xz + yz = 0$ par le réel non nul xy , on obtient :

$$1 + \frac{xz}{xy} + \frac{yz}{xy} = 0,$$

Soit :

$$1 + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} = 0.$$

Ou encore :

$$\frac{z}{y} + \frac{z}{x} = -1.$$

* En divisant par xz puis yz , on obtient de même :

$$\frac{y}{z} + \frac{y}{x} = -1, \text{ et } \frac{x}{z} + \frac{x}{y} = -1.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} &= \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \\ &= \underbrace{\left(\frac{z}{y} + \frac{z}{x}\right)}_{=-1} + \underbrace{\left(\frac{y}{z} + \frac{y}{x}\right)}_{=-1} + \underbrace{\left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y}\right)}_{=-1} \\ &= -3. \end{aligned}$$