Exercice 545-1

La base du château d'eau est circulaire donc l'hyperboloïde est de révolution et, dans un repère orthonormé bien choisi, il a une équation de la forme : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ où a et c sont des nombres réels strictement positifs.

Calculons le volume V du solide limité par l'hyperboloïde et les deux plans d'équations respectives $z=\lambda$ (où λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[-h,0]$) et $z=\lambda+h$.

Pour tout z appartenant à l'intervalle $[\lambda,\lambda+h]$, la section de l'hyperboloïde par le plan de côte z est le cercle d'équation $x^2+y^2=a^2(1+\frac{z^2}{c^2})$ et, par suite,

$$V=\int_{\lambda}^{\lambda+h}\pi\, a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\pi a^2\left(\left(\lambda+h+\frac{(\lambda+h)^3}{3c^2}\right)-\left(\lambda+\frac{\lambda^3}{3c^2}\right)\right).$$

Donc $V=\pi a^2\left(h+\frac{(\lambda+h)^3-\lambda^3}{3c^2}\right)$.

Considérons deux points de l'hyperboloïde : le point M de coordonnées $(d,0,\lambda)$ et le point N de coordonnées $(0,D,\lambda+h)$. L'énoncé permet d'affirmer que la droite (MN) est incluse dans l'hyperboloïde et donc que, pour tout nombre réel ρ, les points de coordonnées $(d+\rho d,-\rho D,\lambda-\rho h)$ appartiennent à l'hyperboloïde.

Par suite, pour tout nombre réel ρ, $\frac{(d+\rho d)^2}{a^2}+\frac{(-\rho D)^2}{a^2}-\frac{(\lambda-\rho h)^2}{c^2}=1$ et donc, pour tout nombre réel ρ,

$c^2(d^2+2\,\rho d^2+\rho^2 d^2+\rho^2 D^2)-a^2(\lambda^2-2\lambda\,\rho h+\rho^2 h^2)=a^2c^2$. Il en résulte que :

- $c^2(d^2+D^2)-a^2h^2=0$ (relation A),
- $c^2d^2+a^2\lambda h=0$ (relation B),
- $c^2d^2-a^2\lambda^2=a^2c^2$ (relation C).

Des relations A et B, il résulte :

$c^2D^2 - a^2h(h+\lambda) = 0$ donc $h + \lambda = \frac{c^2D^2}{a^2h}$ et, compte tenu de la relation A,

$h + \lambda = \frac{a^2h^2}{d^2+D^2} \times \frac{D^2}{a^2h}$ donc $h + \lambda = \frac{hD^2}{d^2+D^2}$ (relation D)

et $\lambda = \frac{hD^2}{d^2+D^2} - h$ donc $\lambda = -\frac{hd^2}{d^2+D^2}$ (relation E).

Donc $= \pi a^2\left(h + \frac{(\lambda+h)^3-\lambda^3}{3c^2}\right) = \pi a^2\left(h + \frac{(\frac{hD^2}{d^2+D^2})^3+(\frac{hd^2}{d^2+D^2})^3}{3c^2}\right)$.

$$V = \pi a^2\left(h + \frac{h^3D^6+h^3d^6}{3c^2(d^2+D^2)^3}\right) = \pi a^2 h\left(1 + \frac{h^2D^6+h^2d^6}{3c^2(d^2+D^2)^3}\right).$$

$$V = \frac{\pi a^2 h}{3c^2}\left(\frac{3c^2(d^2+D^2)^3+h^2D^6+h^2d^6}{(d^2+D^2)^3}\right).$$

D'après les relations B et E, $\frac{a^2}{c^2} = \frac{-d^2}{\lambda h} = \frac{-d^2}{-\frac{h^2d^2}{d^2+D^2}} = \frac{d^2+D^2}{h^2}$ et, par suite,

$$V = \frac{\pi h}{3} \times \frac{d^2+D^2}{h^2} \times \left(\frac{3c^2(d^2+D^2)^3+h^2D^6+h^2d^6}{(d^2+D^2)^3}\right).$$

$$V = \frac{\pi h}{3} \times \frac{d^2+D^2}{h^2} \times \left(\frac{3c^2(d^2+D^2)^3+h^2(D^2+d^2)(D^4-D^2d^2+d^4}{(d^2+D^2)^3}\right).$$

$$V = \frac{\pi}{3h} \times \left(\frac{3c^2(d^2+D^2)^2+h^2(D^4-D^2d^2+d^4}{d^2+D^2}\right).$$

D'après la relation C, $c^2d^2 - a^2\lambda^2 = a^2c^2$. Il en résulte que $c^2 = \frac{c^2}{a^2}d^2 - \lambda^2$.

Compte tenu de la relation $\frac{a^2}{c^2} = \frac{d^2+D^2}{h^2}$ et de la relation E,

$$c^2 = \frac{h^2}{d^2+D^2}d^2 - \left(\frac{hd^2}{d^2+D^2}\right)^2 = \frac{h^2d^2}{(d^2+D^2)^2}(d^2+D^2-d^2).$$

Donc $c^2 = \frac{h^2d^2D^2}{(d^2+D^2)^2}$.

Et par suite, $V = \frac{\pi}{3h} \times \left(\frac{3h^2d^2D^2+h^2(D^4-D^2d^2+d^4}{d^2+D^2}\right).$

$$V = \frac{\pi h}{3} \times \left(\frac{3d^2D^2 + (D^4-D^2d^2 + d^4}{d^2 + D^2}\right).$$

$$V = \frac{\pi h}{3} \times \left(\frac{D^4+2D^2d^2 + d^4}{d^2 + D^2}\right).$$

$$V = \frac{\pi h}{3} \times \frac{(d^2+D^2)^2}{d^2+D^2} = \frac{\pi h(d^2+D^2)}{3} \quad .$$

Finalement, $\boldsymbol{V = \frac{\pi h(d^2+D^2)}{3}}$.

****