Exercice 533-1

Notons α l'abscisse du point *M*.

La tangente *(TM)* a pour équation : $y - \alpha^2 - a = 2\alpha(x - \alpha)$. Les abscisses respectives *u* et *v* $(v \leq u)$ des points *A* et *B* sont donc solutions de l'équation du second degré

$x^2 = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 + a$ qui s'écrit encore $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - a = 0$. Il en résulte que $u + v = 2\alpha$ et que $uv = \alpha^2 - a$.

Soit $\boldsymbol{A}$ l'aire du domaine limité par la corde [*AB*] et la parabole (P_O). L'aire $\boldsymbol{A}$ est donnée par l'intégrale

$$\int_v^u (2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 + a - x^2)dx = \int_v^u (-x^2 + 2\alpha x - \alpha^2 + a)\, dx.$$

L'aire $\boldsymbol{A}$ est donc

$$\left[-\frac{x^3}{3} + \alpha x^2 - (\alpha^2 - a)x\right]_v^u = \left[-\frac{u^3}{3} + \alpha u^2 - (\alpha^2 - a)u\right] - \left[-\frac{v^3}{3} + \alpha v^2 - (\alpha^2 - a)v\right]$$

$$= -\frac{1}{3}(u^3 - v^3) + \alpha(u^2 - v^2) - (\alpha^2 - a)(u - v)$$

$$= -\frac{1}{3}(u - v)(u^2 + uv + v^2 - 3\alpha(u + v) + 3(\alpha^2 - a)).$$

Comme $\alpha = \frac{u+v}{2}$, l'aire $\boldsymbol{A}$ est donc

$$-\frac{1}{3}(u - v)\left(u^2 + uv + v^2 - \frac{3}{2}(u + v)^2 + 3\left(\frac{(u + v)^2}{4} - a\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(u - v)\left(\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2}uv - 3a\right) = -\frac{1}{3}(u - v) \times (\frac{1}{4}(u - v)^2 - 3a).$$

Par ailleurs, $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4uv = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - a) = 4a$.

Et comme $u - v \geq 0, u - v = 2\sqrt{a}$.

Finalement, l'aire $\boldsymbol{A}$ est $-\frac{1}{3} \times 2\sqrt{a} \times (a - 3a) = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Elle est donc constante lorsque *M* décrit (P_s).