

Exercice 545-3

On considère un triangle PQR .

Son aire est $\frac{1}{2}Bh$ où B est la longueur du segment $[QR]$ et h la hauteur relative au côté $[QR]$ du triangle PQR .

On cherche un triangle équilatéral de côté c , de même aire que le triangle PQR .

On montre facilement que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$. On cherche donc c tel que $\frac{1}{2}Bh = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ ou encore $c^2 = (2h) \frac{B}{\sqrt{3}}$.

Soit S le symétrique, par rapport à la droite (QR) , du point P . Par définition de h , $PS = 2h$.

Construisons maintenant un point V tel que le segment $[SV]$ soit de longueur $\frac{B}{\sqrt{3}}$. En fait, pour la clarté de la figure, nous allons construire le point V de sorte que les points P , S et V soient alignés, le point S étant entre les points P et V .

Pour cela, construisons le point T tel que la quadrilatère $SQRT$ soit un parallélogramme. Comme $QR = B$, $ST = B$. Construisons ensuite le point U , situé dans le demi-plan de frontière la droite (ST) ne contenant pas le point P , tel que STU soit un triangle équilatéral.

La bissectrice de l'angle \widehat{STU} coupe la droite (PS) en un point qui est le point V annoncé plus haut.

En effet, $\tan(\widehat{STV}) = \frac{SV}{ST}$ donc $SV = ST \tan(\widehat{STV}) = ST \tan(30^\circ) = ST \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{B}{\sqrt{3}}$.

Les points PSV étant construits, de sorte qu'ils soient alignés, le point S étant entre les points P et V , il reste à construire un point W tel que $SW^2 = SP \times SV$, autrement dit tel que $SW^2 = 2h \times \frac{B}{\sqrt{3}}$. Cette construction est classique. On sait qu'il suffit de construire un demi-cercle de diamètre $[PV]$, par exemple celui qui est situé dans le demi-plan de frontière la droite (PV) ne contenant pas le point T , et de placer le point W à l'intersection de ce demi-cercle et de la droite (ST) . Le point W est alors le point annoncé plus haut.

Comme $c^2 = (2h) \frac{B}{\sqrt{3}}$, $SW = c$ et donc, pour terminer la construction, il suffit de construire un point X tel que le triangle SWX soit équilatéral.
