

545-2. Trouvé sur la toile (Vincent Thill - Migennes)

Soit x, y et z trois réels, tous différents de 0 vérifiant $xy + yz + zx = 0$. Que

vaut $\frac{(x+y)}{z} + \frac{(x+z)}{y} + \frac{(y+z)}{x}$?

Solution proposée par Daniel Văcaru, Pitești, Roumanie

Utiliser le calcul et obtient

$$\frac{(x+y)}{z} + \frac{(x+z)}{y} + \frac{(y+z)}{x} = \frac{xy(x+y) + xz(x+z) + yz(y+z)}{xyz} = \frac{x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2}{xyz}.$$

Mais on a

$$0 = (x+y+z)(xy+yz+zx) \Leftrightarrow 0 = x^2y + xyz + x^2z + xy^2 + y^2z + xyz + xyz + yz^2 + xz^2.$$

On obtient

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 = -3xyz.$$

Il suit que

$$\frac{(x+y)}{z} + \frac{(x+z)}{y} + \frac{(y+z)}{x} = \frac{x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2}{xyz} = \frac{-3xyz}{xyz} = -3.$$