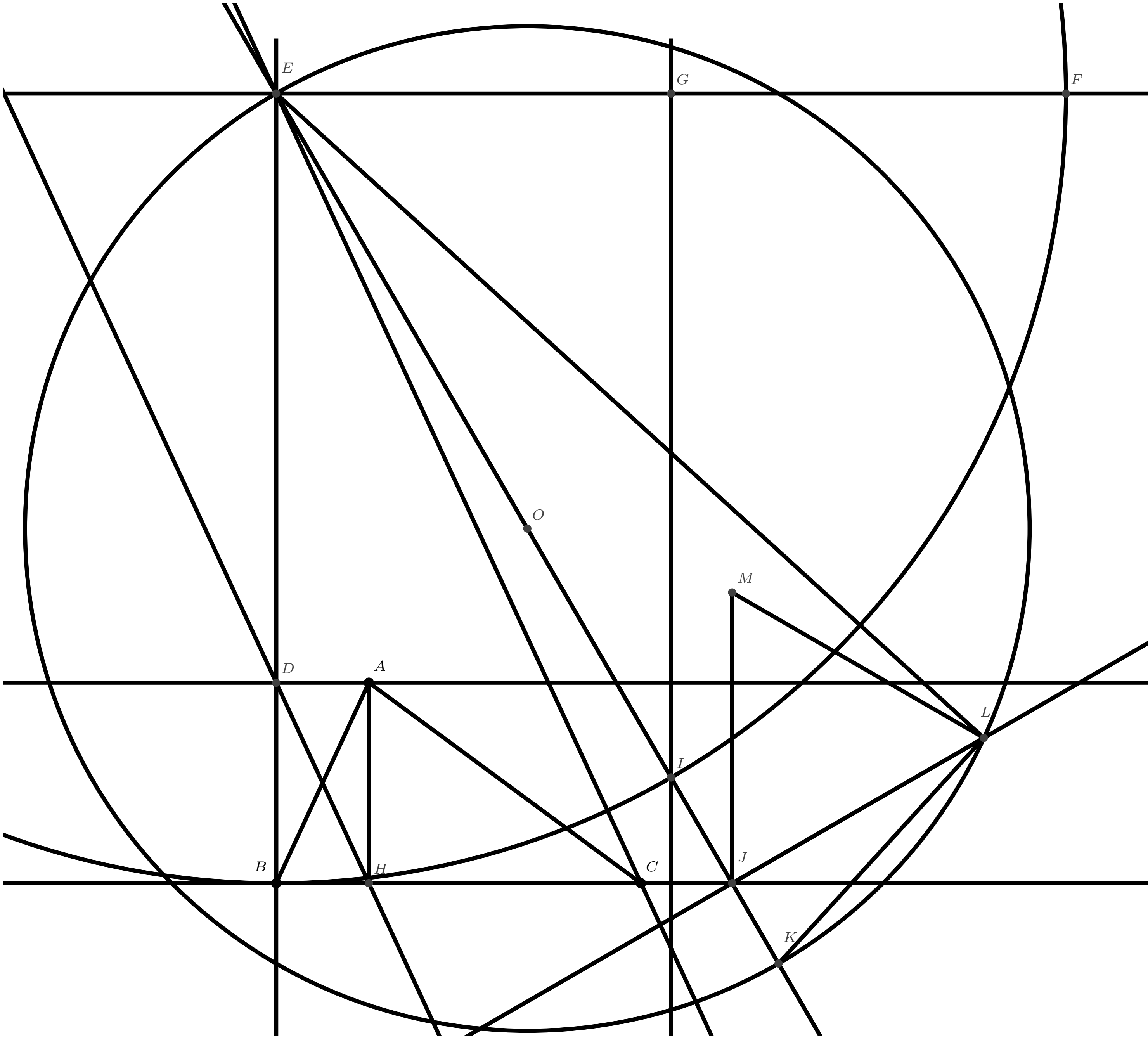
545-3 Inspiré par l'exercice 545-1 (Patrick David et Julien Sautier - Cergy)

Soit (ABC) un triangle non aplati d'aire $\mathcal{S}$.
Il faut construire la règle et au compas un triangle équilatéral d'aire $\mathcal{S}$.
On peut supposer que le triangle (ABC) a tous ses angles aigus car si un des angles est obtus par exemple l'angle $\widehat{B}$ en considérant la parallèle à (BC) passant par A on trouve un triangle $(A'BC)$ de même aire qui a tous ses angles aigus .

A partir d'un triangle (ABC) ayant tous ses angles aigus , j'ai construit le triangle JLM équilatéral et de même aire que ABC.



Explication de ma construction :

Soit AH la hauteur issue de A du triangle ABC et $\mathcal{S} = \frac{BC \times AH}{2}$ son aire.
On cherche à construire un triangle équilatéral (XYZ) de même aire .

Soit x le côté de ce triangle , l'aire de (XYZ) est : $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$
L'égalité des deux aires conduisent aux égalités suivantes :
$\frac{BC\times AH}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow BC \times AH = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$, $\qquad x^2 = \dfrac{BC \times AH}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{BC \times AH}{sin(\frac{\pi}{3})}$

Cette égalité m'a permis de construire le triangle équilatéral.
Il suffit de construire un segment de longueur x vérifiant l'égalité précédente.

Méthode de construction :
• Construction du point D et du point E dont la distance BE s'exprime en fonction de $BC \times AH$.

On construit le point D intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par B et de la parallèle à (BC) passant par A , puis on trace la parallèle à (DH) passant par C qui coupe la droite (BD) au point E
D'après le théorème de Thalès :
$\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BD}{BE} \Leftrightarrow BE = \dfrac{BD \times BC}{BH} = \dfrac{AH \times BC}{BH}$
• Construction des points F , G , I et J .

A partir du point E , on construit le point J de la demi-droite $[BC)$ tel que $EJ = \dfrac{BE}{sin(\frac{\pi}{3})}$

Pour construire le point J , on trace la perpendiculaire à (BE) en E puis le cercle $\mathcal{C}$ de centre E de rayon EB , Dans le demi-plan de frontière (EB) contenant le point C , le cercle $\mathcal{C}$ et la perpendiculaire à (EB) en E se coupent en un point F.
Soit G le milieu de $[EF]$, la parallèle à (EB) passant par G coupe le cercle en un point I tel que $\widehat{BEI} = \frac{\pi}{6}$.

On déduit que la droite (EI) coupe la droite (BC) au point J tel que :
$\widehat{EJB} = \frac{\pi}{3}$ et $sin(\frac{\pi}{3}) = \dfrac{EB}{EJ}$.
donc $EJ = \dfrac{BE}{sin(\frac{\pi}{3})} = \dfrac{BC \times AH}{BH \times sin(\frac{\pi}{3})}$

• construction du point K et du point L tel que $JL = x$.
Le point K est le point de la droite (EJ) tel que $JK = BH$, $K \notin [JE)$.
On construit le cercle de diamètre $[EK]$ puis la perpendiculaire en J à (EK) , qui coupe le cercle en deux points , j'ai nommé L l'un des deux.

Le triangle EKL est un triangle rectangle en L , $[LJ]$ est la hauteur issue de L , on a la relation :

$JE \times JK = JL^2 \Leftrightarrow \dfrac{BE}{sin(\frac{\pi}{3})} \times BH = JL^2$

comme $BE = \dfrac{BD \times BC}{BH} = \dfrac{BC \times AH}{BH}$ alors $\dfrac{BC \times AH}{BH \times sin(\frac{\pi}{3})} \times BH = JL^2$

on obtient finalement $\dfrac{BC \times AH}{sin(\frac{\pi}{3})} = JL^2$

Le segment $[JL]$ est donc un côté d'un triangle équilatéral recherché.

On termine en construisant le point M tel que le triangle JLM est équilatéral.