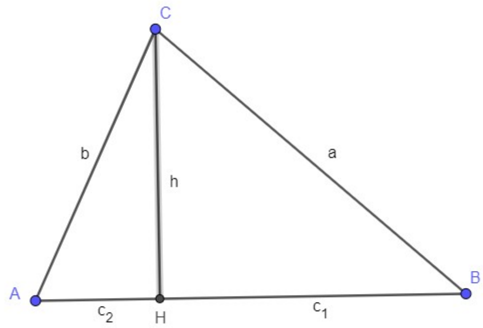
Numéro 546-1

Dans tout ce qui suit H désigne le pied de la hauteur issue de A et *a, b, c, h,* c_1 , c_2 désignent respectivement les longueurs CB, CA, AB, AH, HB et HA, et on suppose que $a+b=c+h$.
On suppose en plus par exemple que $a \geqslant b$.



1. La résolution est simple et les calculs donnent les valeurs $h=60$, $c_1=63$ et $c_2=32$.

2.
Je pense avoir trouvé une méthode permettant de générer des triangles bien élevés. La voilà.

En utilisant les relations
$a^2=h^2+{c_1}^2$, $b^2=h^2+{c_2}^2$ et $a+b=c_1+c_2+h$ on obtient facilement l'égalité $h^2=2(c_1c_2+c_1h+c_2h-ab)$ qui prouve que *h* est nécessairement pair.

En observant les différentes valeurs dans l'exemple fourni à la question 1. on constate que :
$a=87=3\times19+\frac{60}{2}$; $b=68=2\times19+\frac{60}{2}$; $c=5\times19$; $c_1=63=3\times19+6$ et $c_2=32=2\times19-6$.

D'où l'idée de chercher des quintuplets *a, b, h,* c_1 , c_2 solutions sous la forme :
$a=\lambda p+\frac{h}{2}$; $b=\mu p+\frac{h}{2}$; $c_1=\lambda p+k$ et $c_2=\mu p-k$ avec *h* entier naturel pair non nul, et *k, p,* λ et μ entiers naturels avec $0<\mu\leqslant\lambda$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans CHB on obtient $\lambda hp-\frac{3}{4}h^2=k^2+2\lambda kp$ (A)

En appliquant le théorème de Pythagore dans CHA on obtient $\mu hp-\frac{3}{4}h^2=k^2-2\mu kp$ (B)

En soustrayant membres à membres (A) et (B) on obtient $(\lambda-\mu)h=2(\lambda+\mu)k$ donc $k=\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\times\frac{h}{2}$.
En remplaçant *k* par cette dernière expression dans (A), en effectuant les calculs et en réduisant on parvient à l'égalité $2\lambda\mu(\lambda+\mu)p=(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu)h$.

J'ai alors choisi *p* et *h* tels que $p=(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu)$ et $h=2\lambda\mu(\lambda+\mu)$.
Ce choix mène aux expressions suivantes des autres grandeurs en fonction de λ et μ :
$c_1=\lambda(\lambda^2+2\lambda\mu)$; $c_2=\mu(\mu^2+2\lambda\mu)$; $a=\lambda[(\lambda+\mu)^2+\mu^2]$; $b=\mu[(\lambda+\mu)^2+\lambda^2]$ et $k=\lambda\mu(\lambda-\mu)$
et lorsque l'on effectue les calculs avec les expressions ci-dessus on trouve bien que les relations $a^2=h^2+{c_1}^2$, $b^2=h^2+{c_2}^2$ et $a+b=c_1+c_2+h$ sont toutes vérifiées.
En résumé, en prenant deux entiers tels que $0<\mu\leqslant\lambda$
le triangle ABC tel que $BC=a=\lambda[(\lambda+\mu)^2+\mu^2]$, $AC=b=\mu[(\lambda+\mu)^2+\lambda^2]$ et
$\mathrm{AB}=c_1+c_2=\lambda(\lambda^2+2\lambda\mu)+\mu(\mu^2+2\lambda\mu)$ est un triangle bien élevé.
Par exemple, pour $\lambda=5$ et $\mu=2$ on trouve $h=140$, $a=265$, $b=148$, $c_1=225$ et $c_2=48$ et le triangle ABC est bien élevé.

3.
La question qui se pose maintenant est la suivante : inversement, quel que soit le triangle ABC bien élevé, existe-t-il deux réels λ et μ tels que les différentes dimensions du triangle vérifient les relations précédentes.

Je pense que la réponse est oui et je crois en avoir trouvé une démonstration.

On commence par remarquer que pour le prouver pour tous les triangles bien élevés, il suffit de le faire pour ceux des triangles ABC bien élevés dont les côtés ont des longueurs a, b, c qui sont des nombres premiers entre eux dans leur ensemble, et que a, b, c premiers entre eux dans leur ensemble équivaut ici à a, b, h premiers entre eux dans leur ensemble puisque $a+b=c+h$ dans le cas d'un triangle bien élevé.
Je rappelle aussi que h est nécessairement pair lorsque ABC est bien élevé.

Soit donc ABC un triangle bien élevé avec a, b, h premiers entre eux dans leur ensemble.
Je désigne par d le pgcd de $a-\frac{h}{2}$ et $b-\frac{h}{2}$ et par λ et μ les deux entiers naturels vérifiant respectivement $a=\lambda d+\frac{h}{2}$ et $b=\mu d+\frac{h}{2}$.

d et $\frac{h}{2}$ sont premiers entre eux car a, b, h sont premiers entre eux dans leur ensemble.
λ et μ sont premiers entre eux et cela entraîne que $\lambda\mu(\lambda+\mu)$ et $\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu$ sont aussi premiers entre eux.
En effet soit p un diviseur premier de $\lambda\mu(\lambda+\mu)$. p étant premier il divise au moins un des trois facteurs λ, μ et λ+μ.
Si p divise λ alors il divise $\lambda^2+\lambda\mu$ et puisque λ et μ sont premiers entre eux il est impossible que p divise $\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu$.
Le même raisonnement prouve que si p divise μ il est impossible que p divise $\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu$.
Enfin si p divise $\lambda+\mu$ alors il divise $(\lambda+\mu)^2$ donc il divise $(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu)+\lambda\mu$. Or λ et μ sont premiers entre eux entraîne que leur somme $\lambda+\mu$ et leur produit $\lambda\mu$ sont aussi premiers entre eux et donc il est impossible que p divise $\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu$.
On conclut de ce qui précède que $\lambda\mu(\lambda+\mu)$ et $\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu$ sont aussi premiers entre eux.

Les mêmes calculs que ceux menés dans la partie 2. amènent à la relation : $\lambda\mu(\lambda+\mu)d=(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu)\frac{h}{2}$.

$\frac{h}{2}$ divise $\lambda\mu(\lambda+\mu)d$ et $\frac{h}{2}$ est premier avec d donc d'après le théorème de Gauss $\frac{h}{2}$ divise $\lambda\mu(\lambda+\mu)$.
$\lambda\mu(\lambda+\mu)$ divise $(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu)\frac{h}{2}$ et $\lambda\mu(\lambda+\mu)$ et $\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu$ sont premiers entre eux donc de même on conclut que $\lambda\mu(\lambda+\mu)$ divise $\frac{h}{2}$.
De ce qui précède on conclut que $\lambda\mu(\lambda+\mu) = \frac{h}{2}$ puis que $d=\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu$.

A partir de là les relations exprimant *a, b* et *c* en fonction de λ et μ obtenues à la fin de 2. se retrouvent sans problème.

En conclusion, il me semble que :
Soit ABC un triangle ($a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{AC}$, $c=\mathrm{AB}$, H le pied de la hauteur issue de A, $c_1=\mathrm{HB}$, $c_2=\mathrm{HC}$ avec $a\geqslant b$).

Pour que ABC soit bien élevé il faut et il suffit qu'il existe deux entiers naturels λ et μ avec $0<\mu\leqslant\lambda$ tels que $BC=a=\lambda[(\lambda+\mu)^2+\mu^2]$, $AC=b=\mu[(\lambda+\mu)^2+\lambda^2]$ et $\mathrm{AB}=c_1+c_2=\lambda(\lambda^2+2\lambda\mu)+\mu(\mu^2+2\lambda\mu)$.