Numéro 546-2

Soit $x = \dfrac{(2022^2)!}{(2022!)^{2023}}$.

On a ln(x) = $\displaystyle\sum_{k=1}^{2022\times 2022} \ln(k) - 2023\sum_{k=1}^{2022}\ln(k) = \sum_{p=0}^{2021}\left[\sum_{k=1}^{2022}\ln(2022\,p+k)-\ln(k)\right] - \sum_{k=1}^{2022}\ln(k)$.

Donc $\displaystyle \ln(x) = \sum_{p=0}^{2021}\ln\Big(\prod_{k=1}^{2022}\frac{2022\,p+k}{k}\Big) - \sum_{k=1}^{2022}\ln(k) = \sum_{p=0}^{2021}\ln\Big(\prod_{k=1}^{2022}\frac{2022\,p+k}{k}\Big) - \sum_{p=0}^{2021}\ln(p+1)$.

Or $\displaystyle\prod_{k=1}^{2022}\frac{2022\,p+k}{k}$ est égal à $\dfrac{(2022\,p+2022)!}{2022!\times 2022\,p!}$ c'est à dire aussi au nombre $\dbinom{2022(p+1)}{2022}$ de combinaisons de 2022 éléments pris parmi $2022\,p+2022$ éléments.

Les logarithmes népériens de ce nombre et de $p+1$ sont nuls lorsque $p=0$

On peut donc maintenant écrire $\ln(x)$ sous la forme $\displaystyle \ln(x) = \sum_{p=1}^{2021}\ln\Bigg(\frac{\binom{2022(p+1)}{2022}}{p+1}\Bigg)$.

Or $\dfrac{(2022\,p+2022)!}{2022!\times 2022\,p!} = \dfrac{(2022(p+1))!}{2022!\times 2022\,p!} = \dfrac{(2022)\times(p+1)\times(2022\,p+2021)!}{2022\times 2021!\times 2022\,p!} = (p+1)\times\dbinom{2022\,p+2021}{2021}$

où $\dbinom{2022\,p+2021}{2021}$ désigne le nombre (entier) de combinaisons de 2021 éléments pris parmi 2022p + 2021 éléments.

Et donc on a $\displaystyle \ln(x) = \sum_{p=1}^{2021}\ln\binom{2022\,p+2021}{2021}$ et enfin $\displaystyle x = \prod_{p=1}^{2021}\binom{2022\,p+2021}{2021}$.

On en conclut que x est entier puisque les nombres de combinaisons sont des entiers.