Numéro 546-3

On peut par exemple supposer que $a \geqslant b \geqslant c > 0$.

On a : $$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} = \frac{(a-b)ab+(a-c)ac}{(b^2+c^2)(b+c)}$$

de même : $$\frac{b^2}{a^2+c^2} - \frac{b}{a+c} = \frac{(b-c)bc+(b-a)ba}{(c^2+a^2)(c+a)}$$

et : $$\frac{c^2}{b^2+a^2} - \frac{c}{b+a} = \frac{(c-a)ca+(c-b)cb}{(a^2+b^2)(a+b)}$$

en additionnant membres à membres puis en mettant au même dénominateur les trois termes du membre de droite obtenu, on obtient que la différence $\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)-\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)$ dont on cherche le signe a le même signe que la somme des trois termes :

$$[(a-b)ab+(a-c)ac](a+b)(a^2+b^2)(a+c)(a^2+c^2) \;,\; [(b-c)bc+(b-a)ba](b+c)(b^2+c^2)(b+a)(b^2+a^2)$$

et $[(c-a)ca+(c-b)cb](c+a)(c^2+a^2)(c+b)(c^2+b^2)$.

Le premier de ces trois termes, après développement et emploi des identités remarquables, peut s'écrire :
$(a^4-b^4)(a^2+c^2)(a+c)ab+(a^4-c^4)(a^2+b^2)(a+b)ac$;
Le deuxième donne $(b^4-c^4)(b^2+a^2)(b+a)bc+(b^4-a^4)(b^2+c^2)(b+c)ba$.
Le troisième donne $(c^4-a^4)(c^2+b^2)(c+b)ca+(c^4-b^4)(c^2+a^2)(c+a)cb$.

La somme de ces trois termes, après regroupement et factorisations partielles, peut s'écrire sous la forme :
$(b^4-c^4)bc[(a^2+b^2)(a+b)-(a^2+c^2)(a+c)] + (a^4-b^4)ab[(a^2+c^2)(a+c)-(b^2+c^2)(b+c)] +$
$(a^4-c^4)ac[(a^2+b^2)(a+b)-(b^2+c^2)(b+c)]$.

Compte tenu de l'hypothèse $a \geqslant b \geqslant c > 0$ faite au départ il est immédiat de voir que chacun des trois termes de cette nouvelle écriture est positif, donc que l'expression étudiée est positive.
D'où la conclusion.