Numéro 546-4

L'exercice peut se traiter grâce à un peu de calcul barycentrique, l'emploi du théorème de Thales et l'observation du fait que aire(ABC) = aire (IJK) + aire(AIB) + aire(BJC) + aire(AKC).

I est sur [AM] et est différent de A et de M donc il existe des réels non nuls a et m tels que I soit le barycentre de {(A; *a*) ; (M ; *m*)}. On a donc $a\,\overrightarrow{IA}+m\,\overrightarrow{IM}=\vec{0}$.
D'autre part M est le le barycentre de {(B ;2) ; (C ;1)} donc $2\,\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\,\overrightarrow{IM}$ donc $2\,m\,\overrightarrow{IB}+m\,\overrightarrow{IC}=3\,m\,\overrightarrow{IM}$ et enfin, puisque $-3\,m\,\overrightarrow{IM}=3\,a\,\overrightarrow{IA}$, $3\,a\,\overrightarrow{IA}+2\,m\,\overrightarrow{IM}+m\,\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Donc I est le le barycentre de {(A ; 3*a*) ; (B; 2*m*) ; (C; *m*)}.

Par la même méthode on montre qu'il existe des réels non nuls *b* et *n* tels que I soit le le barycentre de {(A ; *n*) ; (B; 3*b*) ; (C; 2*n*)}.
les coefficients barycentriques dans les deux écritures obtenues étant proportionnels, on a :
$\frac{3\,a}{n}=\frac{2\,m}{3\,b}=\frac{m}{2\,n}$ donc $m=6\,a$ et $n=\frac{3}{4}b$. On peut prendre $a=1$.

I est donc le barycentre de {(A;1) ; (M; 6)} (et celui de {(B; 4) ; (N; 3)}).
Donc $\overrightarrow{AI}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AM}$.

Puisque $AI=\frac{6}{7}AM$, on obtient en utilisant le théorème de Thalès que les deux triangles AIB et AMB ont leurs hauteurs respectives *h* et *h'* relatives à leur base commune [AB] qui vérifient $h=\frac{6}{7}h'$ et donc que aire(AIB)= $\frac{6}{7}\times \text{aire}(\text{AMB})$.

Par le même raisonnement et compte tenu du fait que $MB=\frac{1}{3}CB$, on a aire(AMB)= $\frac{1}{3}\times \text{aire}(\text{ABC})$.

Des deux résultats précédents on déduit aire(AIB)= $\frac{2}{7}\times \text{aire}(\text{ABC})$.

On a de manière analogue les relations : aire(AKC) = $\frac{2}{7}\times \text{aire}(\text{ABC})$ et aire(BJC)= $\frac{2}{7}\times \text{aire}(\text{ABC})$.

Donc aire(AIB) + aire(BJC) + aire(AKC) = $\frac{6}{7}\times \text{aire}(\text{ABC})$. Et donc aire(IJK) = $\frac{1}{7}\times \text{aire}(\text{ABC})$