Problème 546-3

On peut supposer $0<a\leqslant b\leqslant c$

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}=\frac{a^2(b+c)-a(b^2+c^2)}{(b+c)(b^2+c^2)}=\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b+c)(b^2+c^2)}$$

$$\frac{b^2}{c^2+a^2}-\frac{b}{c+a}=\frac{b^2(c+a)-b(c^2+a^2)}{(c+a)(c^2+a^2)}=\frac{bc(b-c)+ba(b-a)}{(c+a)(c^2+a^2)}$$

$$\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{c}{a+b}=\frac{c^2(a+b)-c(a^2+b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{ca(c-a)+cb(c-b)}{(a+b)(a^2+b^2)}$$

On veut déterminer le signe de la somme de ces trois fractions qui peut s'écrire comme somme des trois termes suivants :

$$bc(c-b)\left(\frac{1}{(a+b)(a^2+b^2)}-\frac{1}{(c+a)(c^2+a^2)}\right)$$

$$ca(c-a)\left(\frac{1}{(a+b)(a^2+b^2)}-\frac{1}{(b+c)(b^2+c^2)}\right)$$

$$ab(b-a)\left(\frac{1}{(c+a)(c^2+a^2)}-\frac{1}{(b+c)(b^2+c^2)}\right)$$

Dans chacun d'eux le dénominateur de la première fraction est inférieur ou égal au dénominateur de la deuxième. Chaque terme est produit de facteurs positifs ou nuls.

La somme de ces trois termes est donc positive ou nulle.