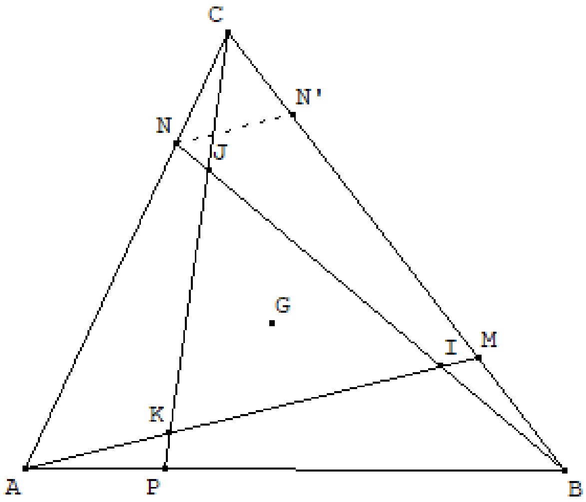
Problème 546-4



Soit k un réel strictement supérieur à 1.

$\overrightarrow{BC} = k\ \overrightarrow{BM} \qquad \overrightarrow{CA} = k\ \overrightarrow{CN} \qquad \overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{AP}$

La somme des aires des triangles AIB, BJC, CKA **est égale à la différence des aires de** ABC **et** IJK

La parallèle à (AM) menée par N coupe $[BC]$ en N'

On a donc $\overrightarrow{CM} = k\ \overrightarrow{CN'}$ et $\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} = k\left(\overrightarrow{BN'} - \overrightarrow{BC}\right)$

soit $(1-k)\overrightarrow{BM} = k\left(\overrightarrow{BN'} - k\,\overrightarrow{BM}\right)$

qui donne $\overrightarrow{BN'} = \dfrac{k^2-k+1}{k}\overrightarrow{BM} = h\,\overrightarrow{BM}$

L'homothétie de centre B de rapport h transforme M en N' et I en N

L'homothétie de centre C de rapport k transforme N' en M et N en A

Leur composée, de centre M de rapport kh transforme I en A

Les triangles BMA et BMI ayant même hauteur issue de B le rapport de leurs aires est celui de leurs bases MA et MI donc : $\dfrac{aire(BMA)}{aire(BMI)} = kh$ avec $aire(BMA) = \dfrac{aire(ABC)}{k}$

En prenant l'aire de ABC pour unité on obtient :

$$aire(BMI) = aire(CNJ) = aire(APK) = \frac{1}{k^2 h} = \frac{1}{k(k^2-k+1)}$$

$$aire(AIB) = aire(BJC) = aire(CKA) = aire(BMA) - aire(BMI) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k(k^2-k+1)} = \frac{k-1}{k^2-k+1}$$

L'aire de IJK est $1 - \dfrac{3(k-1)}{k^2-k+1} = \dfrac{(k-2)^2}{k^2-k+1}$ **Pour** $k=3$ $\dfrac{(k-2)^2}{k^2-k+1} = \dfrac{1}{7}$

Remarque : soit G le centre de gravité du triangle ABC $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{GM} = \frac{(k-1)\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{k} \qquad \overrightarrow{GN} = \frac{(k-1)\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}}{k} \qquad \overrightarrow{GP} = \frac{(k-1)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}{k}$$

$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ G est centre de gravité de MNP

$$\overrightarrow{GI} = \frac{(h-1)\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GN}}{h} \qquad \overrightarrow{GJ} = \frac{(h-1)\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GP}}{h} \qquad \overrightarrow{GK} = \frac{(h-1)\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM}}{h}$$

$\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ G est centre de gravité de IJK

MNP comme IJK sont des images de ABC par une transformation affine.

Position de K **sur** (AM) $\dfrac{AK\,.\,AP}{AM\,.\,AB} = \dfrac{aire(APK)}{aire(BMA)} = \dfrac{1}{kh}$ avec $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{1}{k}$ donne $\dfrac{AK}{AM} = \dfrac{1}{h} = \dfrac{k}{k^2-k+1}$

Pour $k=3$ $\overrightarrow{MI} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{MA}$ donc $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KI} = \dfrac{3}{7}\overrightarrow{AM}$