SOLUTION DU PROBLÈME 546-2

$\frac{(2022^2)!}{(2022!)^{2023}}$ est de la forme $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$=F . On écrit F sous la forme d'un produit de n+1 facteurs.

F=$\frac{1\times 2\times \dots n}{n!}\times\frac{(n+1)\times(n+2)\times\dots\times 2n}{n!}\times\frac{(2n+1)\times\dots\times 3n}{n!}\times\dots\times\frac{((n-1)n+1)\times\dots\times n^2}{n!}\times\frac{1}{n!}$

Le premier facteur est égal à 1 et on divise les deux termes des (n-1) fractions suivantes par n. On obtient:

F=$\frac{(n+1)\times(n+2)\times\dots(2n-1)}{(n-1)!}\times 2\times\frac{(2n+1)\times\dots\times(3n-1)}{(n-1)!}\times 3\times\dots\times\frac{(n^2-n+1)\times\dots\times(n^2-1)}{(n-1)!}\times n\times\frac{1}{n!}$

On simplifie par n!

F=$\frac{(n+1)\times(n+2)\times\dots(2n-1)}{(n-1)!}\times\frac{(2n+1)\times\dots\times(3n-1)}{(n-1)!}\times\dots\times\frac{(n^2-n+1)\times\dots\times(n^2-1)}{(n-1)!}$.

Les (n-1) facteurs de ce produit sont de la forme $\frac{(k+1)\times(k+2)\times\dots\times(k+n-1)}{(n-1)!}=\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ qui est égal à $\binom{k+n-1}{n-1}$ qui est un entier donc F est un entier pour tout entier n.