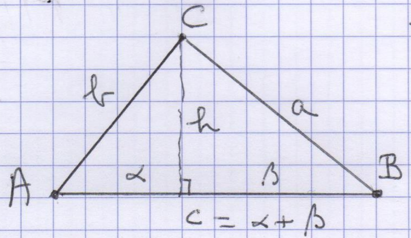
* L'exemple : Il suffit de montrer que il existe

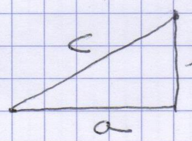


h, α, β dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = h^2 + \beta^2 \\ b^2 = h^2 + \alpha^2 \\ a + b = h + c \end{array}\right\} \text{ qui donne } a^2 - b^2 = \beta^2 - \alpha^2$$

soit $(\beta - \alpha)\, c = a^2 - b^2$: $\beta - \alpha = \dfrac{87^2 - 68^2}{95} = 31$ donc puisque $\beta + \alpha = 95$ on a $\alpha = 32$, $\beta = 63$ et $h = 60$.

* R_1 : On aura besoin du résultat suivant démontré en appendice : Un triangle est pythagoricien si il est rectangle à côtés entiers.

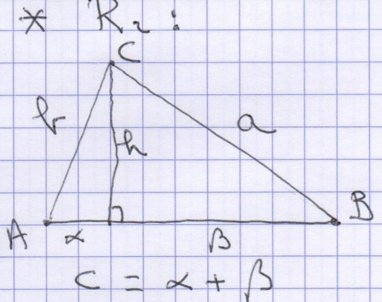


Le triplet (a, b, c) est pythagoricien ssi $\exists\, d \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, p, q \in \mathbb{N}$ de parité différente et premiers entre eux tels que :

$$p < q \text{ et } \begin{cases} a = d\, 2pq \\ b = d\,(q^2 - p^2) \\ c = d\,(q^2 + p^2) \end{cases}.$$

On remarquera que un côté de l'angle droit, ici a est nécessairement pair.

* R_2 :



- $a + b = h + c$; a, b, c dans $\mathbb{N}$ donc $h \in \mathbb{N}$.
- $\alpha + \beta = c \in \mathbb{N}$ et $\beta^2 - \alpha^2 = b^2 - a^2 \in \mathbb{N}$ soit $(\beta - \alpha)\, c \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$
- On cherche donc (a, b, c) tel que il existe h, α, β dans $\mathbb{N}$ tel que $\begin{cases} a^2 = h^2 + \beta^2 \\ b^2 = h^2 + \alpha^2 \\ c = \alpha + \beta \\ a + b = h + c \end{cases}$

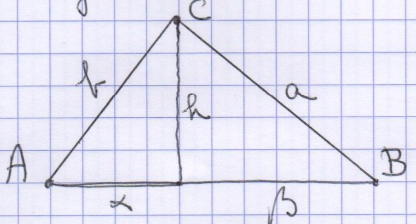
* R_2 : Si (a, b, c) convient pour $k \in \mathbb{N}^*$, (ka, kb, kc) convient aussi (est "bien élevé"). Dans un premier temps on peut donc ajouter la condition $(a, b, c) = 1$.

* R_3 : h est pair.

En effet si h impair alors d'après R_1, α et β sont pairs. Or $(a-b)(a+b) = (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$ donc $(a-b)(a+b)$ ~~est~~ pair donc a et b de même parité donc $a+b$ pair dans $a+b = h+c$ or $a(a+b)$ et $c = \alpha+\beta$ sont pair donc h aussi d'où l'absurdité : h est bien pair.

~~On peut remarque~~

* R_4 : Pour obtenir un triangle "bien élevé", il faut donc "accoler" deux triangles pythagoriciens : D'après R_1



$$\begin{cases} h = d\,2pq \\ \alpha = d(q^2 - p^2) \\ b = d(q^2 + p^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} h = d'\,2p'q' \\ \beta = d'(q'^2 - p'^2) \\ a = d'(q'^2 + p'^2) \end{cases}$$

où $(d, d') = 1$ sinon a, b, c ne seraient plus premiers entre eux. (p, q) et (p', q') vérifient les conditions de R_1. Écrivons que $a + b = h + c$:

$$d'(q'^2 + p'^2) + d(q^2 + p^2) = 2d\,pq + d(q^2 - p^2) + d'(q'^2 - p'^2)$$

qui donne après simplification :

$$d' p'^2 + d p^2 = d\,pq \text{ donc } (d'p'q')p' + d\,p^2 q' = d\,p q q'$$

Or $d'p'q' = d\,pq$ donc en remplaçant, après simplification :

$$qp' + pq' = qq' \text{ soit } \boxed{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = 1}$$

Or $pq' = q(q' - p')$ donc $q \mid pq'$ et $(p, q) = 1$ donc $q \mid q'$ (Gauss) de même $q' | q$ donc $q = q'$ et $p + p' = q \; (= q')$.

Dès lors $d p q = d' p' q'$ s'écrit $d p = d' p'$.

$(d, d') = 1$ mais aussi $(p, p') = 1$ car $\delta | p$ et $\delta | p'$ alors $\delta | p$ et $\delta | p + p' \; (= q)$ donc $\delta = 1$.

Des sorte que $d = p'$ et $d' = p$.

* R_5 : Concluons :

Tout triangle "bien élevé" s'obtient en prenant deux <u>nombres p et p' premiers entre eux</u>

Posant $p + p' = q$ on a :

$$\boxed{\begin{cases} a = p\,(q^2 + p'^2) \\ b = p'\,(q^2 + p^2) \\ c = q\,(q^2 - p p') \end{cases}}$$

(car $c = \alpha + \beta = p'(q^2 - p^2) + p\,(q^2 - p'^2)$).

Rappelons que l'on obtient ainsi $(a, b, c) = 1$,

On peut donc multiplier a, b, c par un entier pour en obtenir d'autres.

* R_6 : En se souvenant que $p' = q - p$ on a donc

$$\left.\begin{array}{l} a = 2pq^2 + p^3 - 2p^2 q \\ b = q^3 - p^3 - pq^2 + qp^2 \\ c = q^3 - pq^2 + qp^2 \end{array}\right\} \text{ soit } \quad \boxed{\begin{array}{l} a + b + c = 2q^3 \\ c - b = p^3 \\ c - a = (q-p)^3 \end{array}} \quad \begin{array}{l} (p, q) = 1 \\ p < q \end{array}$$

Qui permet de générer tous les triangles "bien élevés" et de vérifier si un triangle donné l'est.

Ainsi dans l'exemple de l'énoncé :

$a + b + c = 250 = 2 \times 5^3$, $c - a = 95 - 68 = 3^3$ et $c - b = 95 - 87 = 2^3$

* R_7 : On peut enfin écrire une condition qui lie a, b, c dans un triangle bien élevé :

On part de l'identité $(q-p)^3 = q^3 - 3pq(q-p) - p^3$

que l'on peut écrire : $6^3 p^3 q^3 (q-p)^3 = \left[2q^3 - 2p^3 - 2(q-p)^3\right]^3$

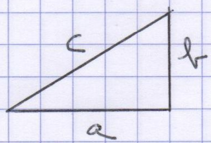
Où l'on remplace à l'aide de R_6 :

$$108(c-b)(c-a)(a+b+c) = 3^3(a+b-c)^3 \text{ soit}$$

$$\boxed{4(a+b+c)(c-a)(c-b) = (a+b-c)^3}$$

et $a=68$, $b=87$, $c=95$ vérifie bien cette relation. FIN

Appendice : Etablissons les formules de R_1.



$a, b, c \in \mathbb{N}$ et $c^2 = a^2+b^2$

- a ou b pair : sinon $a = 2\alpha+1$ et $b = 2\beta+1$ alors $a^2+b^2 = 4(\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta)+2$ ne peut-être un carré car un carré pair est multiple de 4.
- On résout d'abord avec $(a,b,c)=1$: soit donc a pair et b et c impairs.

$a^2 = (c-b)(c+b)$, $(c-b)$ et $(c+b)$ pairs d'où :

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+b}{2}$. Or $\frac{c-b}{2}$ et $\frac{c+b}{2}$ sont premiers entre eux et leur produit est un carré donc ce sont eux-mêmes des carrés : $\frac{c+b}{2} = m^2$, $\frac{c-b}{2} = n^2$, $m > n$

$(m^2, n^2) = 1$ donc $(m,n)=1$ on a donc

$c^2 = m^2+n^2$, $b^2 = m^2-n^2$ et $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = m^2n^2$ d'où R_1

En outre m et n de parité différente car si tous deux impairs alors b et c serait pairs.

Réciproque facile à vérifier.