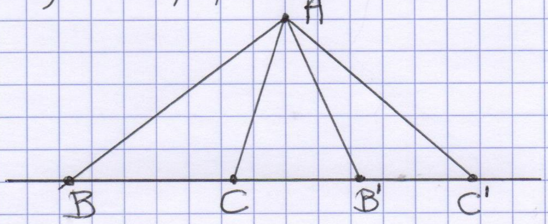
Notation : Si X, Y, Z sont trois points du plan (XYZ) désigne l'aire du triangle XYZ.

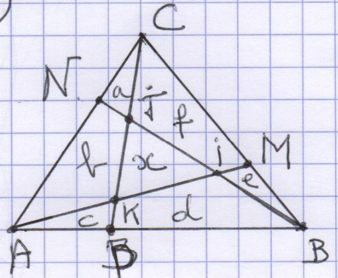
1) Rappel : Dans la figure ci-contre :



On a

$$B'C' \times (ABC) = BC \times (A'B'C').$$

2)



Ici $a = (CNJ)$, $b = (NJKA)$ etc ...

... $x = (IJK)$ enfin $s = (ABC)$.

On a :

$$s = a+b+c+d+e+f+x. \quad (a)$$

Et en appliquant trois fois le rappel :

$$\left.\begin{aligned} 3(a+b+c) &= s \\ 3(c+d+e) &= s \\ 3(e+f+a) &= s \end{aligned}\right\}$$

qui donne en ajoutant :

$2(a+c+e)+(b+d+f) = s$ et par (a) : $(a+c+e)+(b+d+f)+x = s$

d'où l'on tire $\boxed{x = a+c+e}$

3) J barycentre de (C, λ) et (P, μ)

donc J barycentre de (C, λ) et $\left(A, \frac{2\mu}{3}\right)$ et $\left(B, \frac{\mu}{3}\right)$.

Par ailleurs : J barycentre de (B, α) et (N, β) donc

J barycentre de (B, α) et $\left(A, \frac{\beta}{3}\right)$ et $\left(C, \frac{2\beta}{3}\right)$

donc : $\frac{\alpha}{\mu/3} = \frac{\beta/3}{2\mu/3} = \frac{2\beta/3}{\lambda}$ donc on peut prendre

$\lambda = 4$ et $\mu = 3$: J barycentre de $(P, 3)$ et $(C, 4)$

de sorte que $\boxed{3JP = 4JC}$

4) Donc d'après le rappel $(JAC) = \frac{3}{7}(ACP)$

Or $(ACP) = \frac{s}{3}$, toujours d'après le rappel et

donc $\boxed{(JAC) = \frac{s}{7}}$

5) Mais considérant les triangles JAC et AJP et le fait que $3\,CN = AC$, on a pour le rappel :

$(JAC) = 3a$. De même $3c = 1/7$ et $3e = 1/7$

$= 1/7$

Donc $\boxed{a + c + e = 1/7}$

6) Or d'après 2) on a $(a+c+e) = x$

Donc $x = 1/7$ soit $(IJK) = \frac{1}{7}(ABC)$