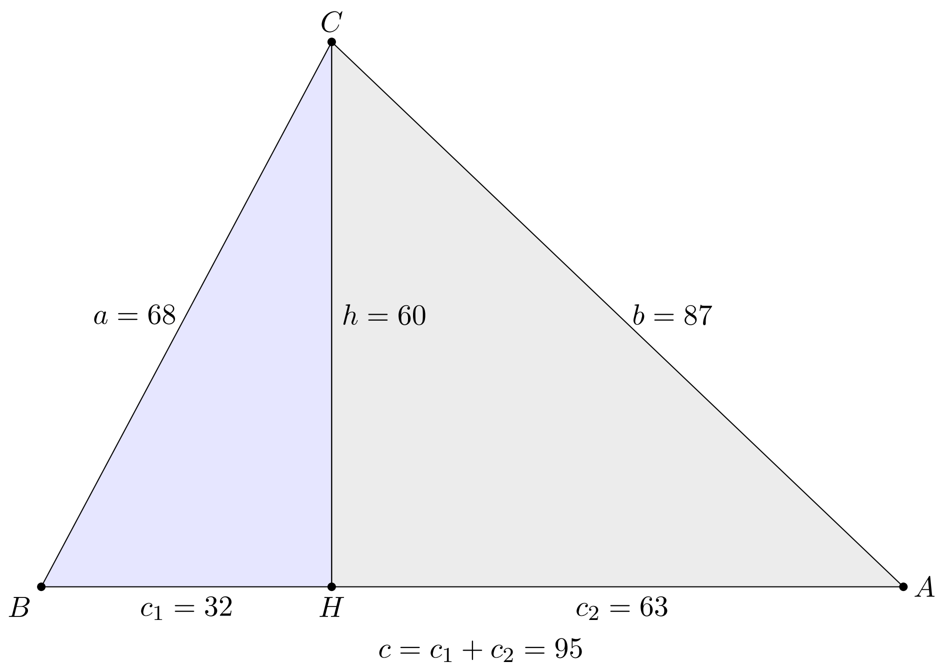
Recherche de triangles bien élevés

Patrick David (david@ensea.fr)

Mars 2023



I. Énoncé : Au fil des problèmes 546-1 (AFDM 546, p 66)

Un triangle à côtés de longueurs entières naturelles non nulles est dit " bien élevé " si la somme des longueurs de deux de ses trois côtés est égale à la somme des longueurs du troisième et de celle de la hauteur relative à ce troisième côté.
1. Montrer que le triangle de côtés $\{68, 87, 95\}$ est bien élevé.
2. Trouver tous les triangles bien élevés.

II. Remarques et notations.

Remarque : 1. Si les longueurs des cotés du triangle (A, B, C) sont notées $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, en choisissant $a \leq b \leq c$, la hauteur h est inférieure aux deux cotés qui ne lui sont pas orthogonaux (Pythagore). En envisageant que le troisième côté soit successivement :
• $[B, C]$, on devrait avoir $a \leq h < b \leq c$ ou $h \leq a \leq b \leq c$. Dans ces cas $a + h = b + c$ est impossible.

• $[C, A]$ on devrait avoir $h < a \leq b \leq c$. Dans ce cas $h + b = a + c$ est impossible.
• $[A, B]$ on peut dans ce cas avoir $h < a \leq b \leq c$ avec $h + c = a + b$. Ce qui montre que le troisième côté est nécessairement le plus grand.
Remarque : 2. Une solution triviale est obtenue avec $c = a + b$ et $h = 0$ (triangle aplati). Cette situation va apparaitre dans les calculs et elle permettra de simplifier les calculs. Cependant, les triangles aplatis ne sont pas ici considérés comme des triangles bien élevés.

Proposition 1: Soit triangle de côtés de longueurs a, b, c avec $a \leq b \leq c$,
1. L'aire de ce triangle est $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ dans lequel $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre.
2. La hauteur relative à $[A, B]$ est $[C, H]$ de longueur $h = \frac{2S}{c}$.
3. Le triangle est bien élevé si h est entier strictement positif tel que $a + b = c + h$.

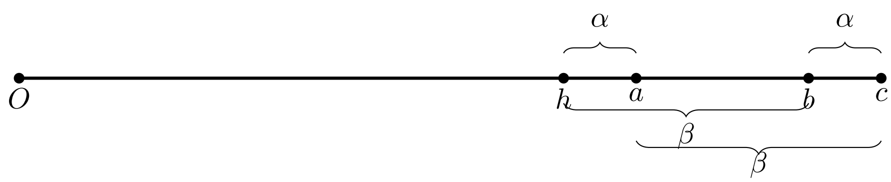
Démonstration :
1. C'est la formule de Héron.
2. Vient de $S = \frac{ch}{2}$
3. $0 \leq h$ sinon $S \leq 0$ et il ne s'agit pas d'un triangle. h est entier puisque $h = a + b - c$ qui sont trois entiers naturels non nuls.
Exemple :
Pour le triangle de côtés de longueurs $\{68, 87, 95\}$ proposé on a immédiatement :
$p = \frac{68+87+95}{2} = 125$
$S = \sqrt{125(125-68)(125-87)(125-95)} = 2850$
$h = \frac{2\times2850}{95} = 60$
On a bien $a + b = 68 + 87 = c + h = 95 + 60 = 155$ le triangle est bien élevé. On a aussi $h < a \leq b \leq c$.
Pour faire les calculs avec Mathematica, on utilise les deux fonctions suivantes :

```
hauteur[{a_, b_, c_}] := Module[{p, S},
p = Plus @@ {a, b, c}/2 ;(*demi-périmètre*)
S = Sqrt[p (p - a) (p - b) (p - c)] ;(*Héron*)
(2 S)/c] ;

bienEleve[{a_, b_, c_}] :=Module[{h} ,
h = hauteur[{a, b, c}] ;
a + b == c + h] ;.
```

III. Recherche de solutions.

Comme pour les triangles pythagoriciens, les triangles bien élevés gardent cette propriété par homothétie de rapport entier naturel non nul. Nous allons donc rechercher particulièrement les triangles bien élevés tels que $PGCD(a, b, c) = 1$ que l'on appellera *triangles bien élevés primitifs*.
Sur cette figure, on a reporté sur une demi-droite issue de O les longueurs h, a, b, c ainsi que leurs différences significatives.



De $a+b=c+h$ on déduit que $a-h=c-b$ et aussi $b-h=c-a$. On note : $\alpha = a-h = c-b$ et $\beta = b-h = c-a$. Pour un triangle " bien élevé ", on appelle "les différences" les α et β ainsi définis. Soit $[B,H]$, de longueur c_1 le troisième côté du triangle pythagoricien ayant pour hypoténuse $[B,C]$ de longueur a et pour autre côté $[C,H]$ de longueur h, et $[A,H]$ de longueur c_2 le troisième côté du triangle pythagoricien ayant l'hypoténuse $[C,A]$ de longueur b et pour autre côté $[C,H]$ de longueur h.

Proposition 2:

1. On a $c = c_1 + c_2$.
2. $c_1^2 = \sqrt{a^2-h^2}$ et $c_2^2 = \sqrt{b^2-h^2}$.
3. $a = h+\alpha$, $b = h+\beta$, $c = h+\alpha+\beta$.

Démonstration :
1. Il faut montrer que H est entre A et B. Or si ce n'était pas le cas on aurait un des deux angles en A ou en B qui serait obtus et alors $c < a$ ou $c < b$ contrairement à la remarque 1.
2. Résulte du théorème de Pythagore dans les triangles rectangles (B,H,C) et (A,H,C).
3. Résulte de la définition de α et de β.

Proposition 3: Soient α et β deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. S'il existe un triangle bien élevé primitif ayant les différences α et β alors :
1. h est une racine entière strictement positive du polynôme :
$P(h) = h^3 - 12\alpha\beta h - 8(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = 0$.
2. Cette racine est la seule racine réelle de ce polynôme P, et
$h = 2(\sqrt[3]{\alpha^2\beta} + \sqrt[3]{\alpha}\beta^2)$.
3.Si h est entière, alors $a = h+\alpha$, $b = h+\beta$, $c = h+\alpha+\beta$.

Démonstration :
On va décrire le triangle bien élevé primitif à l'aide des trois paramètre h, α, β.
1. D'après la proposition 2 :
$c = h+\alpha+\beta = c_1 + c_2 = \sqrt{a^2-h^2} + \sqrt{b^2-h^2} = \sqrt{(h+\alpha)^2-h^2} + \sqrt{(h+\beta)^2-h^2}$.
Donc $c^2 = (h+\alpha+\beta)^2 = (h+\alpha)^2 - h^2 + (h+\beta)^2 - h^2 + 2\sqrt{(h+\alpha)^2-h^2}\sqrt{(h+\beta)-h^2}$.
ou encore $h^2 + 2\alpha\beta = 2\sqrt{2\alpha h+\alpha^2}\sqrt{2\beta h+\beta^2}$.
Après une nouvelle élévation au carré on a :$(h^2+2\alpha\beta)^2 = 4(2\alpha h+\alpha^2)(2\beta h+\beta^2)$.
h est donc une racine du polynôme du quatrième degré :
$h^4 - 12\alpha\beta h^2 - 8(\alpha 2\beta + \alpha\beta^2)h$
On voit que 0 est une racine évidente, ce qui était prévisible puisque $h = 0$ correspond à un triangle aplati avec $a+b=c$ qui n'est pas considéré comme un triangle bien élevé.
h est donc en définitive une racine entière strictement positive du polynôme
$P(h) = h^3 - 12\alpha\beta h - 8\alpha\beta(\alpha+\beta)$
2. On se trouve exactement dans le cadre de la résolution d'une équation du troisième degré

$x^3+px+q=0$ par la méthode de Cardan avec $p=-12\alpha\beta$ et $q=-8\alpha\beta(\alpha+\beta)$. On peut même utiliser la forme réduite avec $p=3p'$ et $q=2q'$, où $p'=-4\alpha\beta$ et $q'=-4\alpha\beta(\alpha+\beta)$. Dans ce cas :
$\Delta'=-(p'^3+q'^2)=-(-(4\alpha\beta)^3+(-4\alpha\beta(\alpha+\beta))^2)=-16\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2$.
Comme $\Delta'<0$, il y a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.
On peut prendre $\pm\sqrt{-\Delta'}=\pm 4\alpha\beta(\alpha-\beta)$.
On pose $u=\sqrt[3]{-q'+\sqrt{-\Delta'}}=2\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$ et $v=\sqrt[3]{-q'-\sqrt{-\Delta'}}=2\sqrt[3]{\alpha\beta^2}$. D'après la méthode de Cardan, l'unique racine réelle de P est $h=2(\sqrt[3]{\alpha^2\beta}+\sqrt[3]{\alpha\beta^2})$.
3. Si pour α et β sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux, et si de plus h est un entier naturel non nul, on a bien $a=h+\alpha$, $b=h+\beta$, $c=h+\alpha+\beta$ qui dont aussi des entiers avec $c+h=a+b$. De plus $PGCD(a,b,c)=PGCD(h+\alpha,h+\beta,h+\alpha+\beta)=PGCD(h+\alpha,h+\beta,\alpha)=PGCD(h,h+\beta,\alpha)=PGCD(h,\beta,\alpha)=1$ puisque α et β sont premiers entre eux . Donc le triangle de côtés de longueurs (a,b,c) est bien un triangle bien élevé primitif.

IV. Cas des α et β cubes d'entiers.

Il faut trouver les entiers premiers entre eux α et β tels que $h=2(\sqrt[3]{\alpha^2\beta}+\sqrt[3]{\alpha\beta^2})$ soit un entier. On a une solution évidente quand α et β sont eux même des cubes d'entiers. En posant $\alpha=\alpha'^3$ et $\beta=\beta'^3$ on a immédiatement :

Théorème 4: Soient α' et β' deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.
1. Si $(\alpha',\beta')=(1,1)$ ou si $\alpha'<\beta'$, il existe un unique triangle bien élevé primitif admettant $\alpha=\alpha'^3$ et $\beta=\beta'^3$ comme différences et tel que $h<a\leq b<c$.
2. Dans ce cas $h=2(\alpha'^2\beta'+\alpha'\beta'^2)$, $a=2(\alpha'^2\beta'+\alpha'\beta'^2)+\alpha'^3$, $b=2(\alpha'^2\beta'+\alpha'\beta'^2)+\beta'^3$, $c=2(\alpha'^2\beta'+\alpha'\beta'^2)+\alpha'^3+\beta'^3$. h est toujours pair.
3. Si $\alpha'>\beta'$ on retrouve des triangles isométriques avec a et b échangés.

Démonstration : 1. $(\alpha',\beta')=(1,1)$ est le seul cas où (α',β') sont égaux tout en étant premiers entre eux.
2. résulte de la proposition 3 et de $\alpha=\alpha'^3$ et $\beta=\beta'^3$. On vérifie immédiatement que : $a+b=c+h=4\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3+\beta^3$. On vérifie immédiatement que : $a+b=c+h=4\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3+\beta^3$.
3. Permet d'éviter de construire des triangles bien élevés primitifs doublons.
Voici par exemple la table des triangles bien élevés primitifs pour $1=\alpha'\leq\beta'\leq 4$ donnés sous la forme (a,b,c,h) avec α' à gauche et β' en haut.

	1	2	3	4	5
1	$(5,5,6,4)$	$(13,20,21,12)$	$(25,51,52,24)$	$(41,104,105,40)$	$(61,185,186,60)$
2			$(68,87,95,60)$		$(148,265,273,140)$
3				$(195,232,259,168)$	$(267,365,392,240)$
4					$(424,485,549,360)$

On retrouve pour $\alpha'=2$ et $\beta'=3$ l'exemple $(68,87,95,60)$ traité au commencement.

IV. Décomposition des triangles bien élevés primitifs trouvés en juxtaposition de deux triangles pythagoriciens.

On remarque immédiatement que les deux triangles pythagoriciens (h, c_1, a) et (h, c_2, b) ne sont pas en général pythagoriciens primitifs. Dans l'exemple traité de triangle bien élevé primitif $(a, b, c, h) = (68, 87, 95, 60)$, avec $(\alpha', \beta') = (2, 3)$ on a $(h, c_1, a) = (60, 32, 68) = 4(15, 8, 17)$ et $(h, c_2, b) = (60, 63, 87) = 3(20, 21, 29)$ ne sont pas primitifs.
On sait qu'un triplet pythagoricien $(x, y, z) = k(x', y', z')$ avec (x', y', z') triplet pythagoricien primitif et $k = \text{pgcd}(x, y, z)$. De plus la relation $x^2 + y^2 = z^2$ implique que le $\text{pgcd}(x, y, z)$ est égal au pgcd de deux quelconques des trois.

Proposition 5: Soit (h, c_1, a) un des triangles pythagoriciens inclus dans un triangle bien élevé primitif (a, b, c). Alors si on se trouve dans le cas ou les différences sont des cubes d'entiers :
1. Si a est impair avec $\alpha'^3 = a - h$, alors $\alpha' = \text{pgcd}(h, c_1, a)$.
2. Si a est pair et si $\alpha'^3 = a - h$, alors $2\alpha' = \text{pgcd}(h, c_1, a)$.
3. Pour le triangle pythagoricien associé (h, c_2, b) le résultat est similaire, en remplaçant c_1 par c_2, a par b et α' par β'.
4. Pour un triangle bien élevé primitif, il est impossible que a et b (et donc α' et β') soient simultanément pairs.

Démonstration :
On a $h = 2\alpha'\beta'(\alpha' + \beta')$ et $a = 2\alpha'\beta'(\alpha' + \beta') + \alpha'^3$. Donc :
$\text{pgcd}(h, c_1, a) = \text{pgcd}(h, a) = \text{pgcd}(2\alpha'\beta'(\alpha' + \beta'), 2\alpha'\beta'(\alpha + \beta') + \alpha'^3) = \alpha' \,\text{pgcd}(2\beta'(\alpha' + \beta'), \alpha'^2)$
1. Si a est impair, α' est également impair, et comme α' et β' sont non nuls et premiers entre eux, $\text{pgcd}(2\beta'(\alpha' + \beta'), \alpha'^2) = \text{pgcd}(2\beta'(\alpha' + \beta'), \alpha'^2) = 1$
2. Si a est pair, α' est également pair mais β' est impair , et comme α' et β' sont non nuls et premiers entre eux, $\text{pgcd}(2\beta'(\alpha' + \beta'), 2\beta'(\alpha' + \beta') + \alpha'^2) = \text{pgcd}(2\beta'(\alpha' + \beta'), \alpha'^2) = 2$ car $\beta'(\alpha' + \beta')$ est impair et premier à α'.
3. On a vu que a, b, ainsi que α et β, α' et β' et c_1 et c_2 jouent des rôles symétriques.
4. Si α' et β' sont simultanément pairs, il en est de même pour a, b, c et (a, b, c) n'est pas un triangle bien élevé primitif.
En conclusion il y a une infinité de triangles bien élevés primitifs indexés par les couples d'entiers naturels non nuls premiers entre eux(α', β') . Il y a de plus une infinité de triangles bien élevés obtenus en multipliant les triangles bien élevés primitifs par un entier naturel non nul k.

V. Problème de l'existence de triangles bien élevés primitifs tels que l'une des différences $a - h$ ou $b - h$ n'est pas un cube.

Il reste à démontrer que de cette manière on a bien trouvé tous les triangles bien élevés. Il faudrait donc prouver qu'il n'existe pas de solution h entière naturelle du polynôme P si α et β ne sont pas des cubes d'entiers non nuls. Cela revient à démontrer la conjecture.
Conjecture : α et β sont tous les deux des cubes d'entiers naturels non nuls si et seulement si $h = 2\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})$ est un entier naturel non nul.
Cette conjecture semble vraie. Aucun "petit" contre-exemple n'a été informatiquement trouvé, mais une démonstration rigoureuse manque.