Une extension de l'inégalité de Nesbitt

Patrick David (daiweide1@gmail.com)

Février 2023

Énoncé : Au fil des problèmes 546-3 (AFDM 546, p 66)

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^{*3}$, montrer que

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2} \geqslant \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Résolution

1. Soit
$$f(a,b,c)=\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}-\frac{a}{b+c}-\frac{b}{c+a}-\frac{c}{a+b}$$
On doit démontrer que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^{*3}, f(a,b,c) \geqslant 0$.
On remarque que cette fonction est homogène, $f(ka,kb,kc)=f(a,b,c)$ pour tout k non nul.
En choisissant k tel que $kc=1$, il suffit de démontrer qu'avec :
$g(a,b)=f(a,b,1)=\frac{a^2}{b^2+1}+\frac{b^2}{1+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}-\frac{a}{b+1}-\frac{b}{1+a}-\frac{1}{a+b}$
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}, g(a,b) \geqslant 0$$
En réduisant au même dénominateur on a : $g(a,b)=\dfrac{n(a,b)}{d(a,b)}$ avec :
$n(a,b)=a^8b+a^8+2a^7b+a^6b^2+a^6b-a^5b^4-a^5b^3-2a^5b^2-a^5b-a^5-a^4b^5-a^4$ $-a^3b^5-a^3b+a^2b^6-2a^2b^5-2a^2b^2+a^2b+ab^8+2ab^7+ab^6-ab^5-ab^3+ab^2+2ab+$ $a+b^8-b^5-b^4+b$
et $d(a,b)=(a+1)\left(a^2+1\right)(b+1)\left(b^2+1\right)(a+b)\left(a^2+b^2\right)$
2. Il faut montrer que $n(a,b) \geqslant 0$. Pour cela il faut factoriser $n(a,b)$. Avec l'aide de Mathematica, on trouve : $n(a,b)=n_1(a,b)n_2(a,b)$ avec
$n_1(a,b)=\left(a^2+ab+a+b^2+b+1\right)$ et
$n_2(a,b)=(a^6-a^5-a^2+a)+(b^6-b^5-b^2+b)+(a^6b-a^5b^2-a^2b^5+ab^6)$
Or on peut encore factoriser :
$n_{2,1}(a,b)=(a^6-a^5-a^2+a)=(a-1)^2a(a+1)\left(a^2+1\right)$
$n_{2,2}(a,b)=(b^6-b^5-b^2+b)=(b-1)^2b(b+1)\left(b^2+1\right)$
$n_{2,3}(a,b)=(a^6b-a^5b^2-a^2b^5+ab^6)=ab(a-b)^2(a+b)\left(a^2+b^2\right)$
En définitive :

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad n_1(a,b) \geqslant 0,\ n_{2,1}(a,b) \geqslant 0,\ n_{2,2}(a,b) \geqslant 0,\ n_{2,3}(a,b) \geqslant 0.$
Donc $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad n(a,b) = n_1(a,b)\left(n_{2,1}(a,b) + n_{2,2}(a,b) + n_{2,3}(a,b)\right) \geqslant 0$ et aussi $d(a,b) > 0$.
Finalement ;
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2} \quad g(a,b) = \dfrac{n(a,b)}{d(a,b)} = \dfrac{n_1(a,b)\left(n_{2,1}(a,b) + n_{2,2}(a,b) + n_{2,3}(a,b)\right)}{d(a,b)} \geqslant 0.$
Nous avons donc démontré, certes de manière un peu trop calculatoire, que :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}_+^{*3}\ \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

On peut remarquer que l'on a égalité en particulier si $a = b = c > 0$, et aussi si $a = b > 0$ et $c = 0$,si $b = c > 0$ et $a = 0$, et si $c = a > 0$ et $b = 0$.