Exercice AFDM-546-2

Julien Sautier (sautier.julien@orange.fr), Patrick David (daiweide1@gmail.com)

Mars 2023

Montrer que $\dfrac{(2022^2)!}{(2022!)^{2023}}$ est un entier.

La propriété à démontrer ne dépend pas de la valeur 2022 utilisée. On peut montrer qu'elle est vraie pour tout entier naturel a.

Proposition :

Pour tout entier naturel a ,

$$\frac{(a^2)!}{(a!)^{a+1}}$$

est nombre entier.

Ce résultat est évident pour $a = 0$ ou $a = 1$. Pour en faire la démonstration, nous rappelons les propriétés utiles des coefficients binomiaux dans le lemme.

Lemme :

1. Pour tous les entiers naturel p et q, $\dfrac{(q+1)(q+2)\dots(q+p-1)(q+p)}{p!}$ est entier.
2. Pour tous les entiers naturels p et n avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-p \end{pmatrix}$
3. Pour tous les entiers naturels p et n avec $0 < p \leqslant n$, $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n}{p} \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$
4. Pour tous les entiers naturels a et k non nuls, $\begin{pmatrix} ka \\ a \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} ka-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$.

En particulier, k divise $\begin{pmatrix} ka \\ a \end{pmatrix}$

Démonstration : 1. $\dfrac{(q+1)(q+2)\dots(q+p-1)(q+p)}{p!} = \begin{pmatrix} p+q \\ p \end{pmatrix}$.

2. Relation classique de symétrie dans le triangle de Pascal.

3. $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n}{p} \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \dfrac{n}{p} \begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$

4. En prenant $n = ka$ et $p = a$ dans la formule précédente, on a bien :

$\begin{pmatrix} ka \\ a \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} ka-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$

Maintenant que nous avons établi ce lemme, démontrons la proposition : pour tout entier a, $\dfrac{(a^2)!}{(a!)^{a+1}}$ est entier.

Démonstration : En regroupant par paquets de a termes les éléments de $(a^2)!$ on a
$\frac{(a^2)!}{(a!)^{a+1}} = \frac{1}{a!}\left(\frac{1\dots a}{a!}\right)\left(\frac{(a+1)\dots 2a}{a!}\right)\dots\left(\frac{((a-2)a+1)\dots(a-1)a}{a!}\right)\left(\frac{((a-1)a+1)\dots a^2}{a!}\right) =$
$[*]\frac{1}{a!}\binom{a}{0}\binom{2a}{a}\dots\binom{(a-1)a}{(a-2)a}\binom{a^2}{(a-1)a} = [**]\frac{1}{a!}\binom{a}{a}\binom{2a}{a}\dots\binom{(a-1)a}{a}\binom{a^2}{a} =$
$[***]\frac{1}{a!}1\binom{a-1}{a-1}2\binom{2a-1}{a-1}\dots(a-1)\binom{(a-1)a-1}{a-1}a\binom{a^2-1}{a-1} =$
$\binom{a-1}{a-1}\binom{2a-1}{a-1}\dots\binom{(a-1)a-1}{a-1}\binom{a^2-1}{a-1}$ qui est bien un entier.

Remarques. En [*] on utilise le Lemme propriété 1., en [**] on utilise le Lemme propriété 2., en [***] on utilise le Lemme propriété 4.
En appliquant ce résultat à $a = 2022$ on trouve bien que $\frac{(2022^2)!}{(2022!)^{2023}}$ est un entier. On peut remarquer par un calcul approximatif à l'aide de la formule de Stirling que $\frac{(2022^2)!}{(2022!)^{2023}}$ s'écrit avec environ $1,35.10^7$ chiffres !