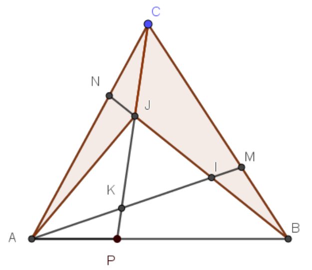
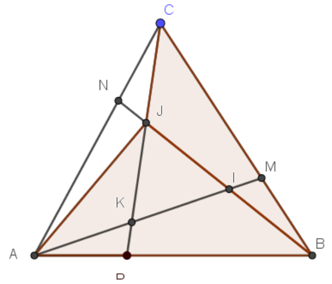
Notons k le rapport $\frac{PB}{PA}$ avec $k \geq 1$ avec $k = 2$ dans notre cas particulier

On applique le lemme du chevron, cher à Daniel Perrin.



$$\frac{A_{CJB}}{A_{ACJ}} = k \quad (1)$$



$$\frac{A_{AJB}}{A_{CJB}} = k$$

$$A_{ABC} = A_{CJB} + A_{AJB} + A_{ACJ}$$
$$A_{ABC} = A_{CJB} + \frac{1}{k}A_{CJB} + kA_{CJB}$$

$$A_{CJB} = \frac{k}{1+k+k^2}A_{ABC}$$

De même

$$A_{AIB} = \frac{k}{1+k+k^2}A_{ABC}$$

Et

$$A_{AKC} = \frac{k}{1+k+k^2}A_{ABC}$$

Or

$$A_{ABC} = A_{CJB} + A_{AIB} + A_{AKC} + A_{IJK}$$

donc

$$A_{IJK} = \frac{(k-1)^2}{1+k+k^2}A_{ABC}$$

avec $k = 2$ dans le cas qui nous intéresse

$$A_{IJK} = \frac{1}{7}A_{ABC}$$

On peut montrer de plus que les triangles $AJC, AJK, IJK, IJC, ICB, IKB$ et ABK ont la même aire si $k = 2$, d'où le titre du problème je suppose.

La relation (1) donne $A_{ACJ} = \frac{1}{1+k+k^2}A_{ABC}$ il en va de même pour A_{ICB} et A_{ABK}

De plus comme $A_{AKC} = A_{AIB} = A_{CJB}$ puisque $A_{ACJ} = A_{ICB} = A_{ABK}$

on a $A_{AJK} = A_{IJC} = A_{IKB} = \frac{k-1}{1+k+k^2}$ et si $k = 2$ les 7 aires sont bien égales.