Solution au problème 546-2

On va montrer que $(n^2)!/(n!)^{(n+1)}$ est un entier.

Dans $(n^2)!/(n!)^n$ on reconnait un coefficient multinomial $M= \binom {n^2}{n,n,\cdots,n}$ qui est un entier. Mais là il y a un n! de plus !

Or M est le nombre de partitions **ordonnées** de $E=\{1,2,.., n^2\}$ en n parties à n éléments, c'est-à-dire le nombre de n-uplets $(X_1,...,X_n)$ avec $|X_i|=n$ où $\{X_1,...,X_n\}$ est une partition de E.

Donc le nombre de partitions (non ordonnées) de E en n parties à n éléments est $M/n!$ qui est donc un entier.

On doit pouvoir y arriver aussi en utilisant la formule de Legendre $v_p(n!)=\sum_{k=1}^{\infty}\lfloor n/p^k\rfloor$.