546-1 Un triangle bien élevé.

Un triangle à côtés entiers est appelé “bien élevé” si la somme de deux de ses côtés est égale à la somme du troisième côté et de la hauteur relative à ce côté.

On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$; on suppose que la hauteur est issue, par exemple du sommet C, et on désigne par h_c sa longueur. Le triangle ABC est donc bien élevé si et seulement si

$$a + b = c + h_c. \tag{1}$$

Soit S la surface du triangle ABC ; on sait que

$$S = \frac{1}{2}c{\cdot}h_c = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(-a+b+c)}{2}\frac{(a-b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}}.$$

En élevant au carré, on en déduit l’expression de h_c^2, et (1) s’écrit $h_c^2 = (a+b-c)^2$, qui est équivalent à

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c) = 4c^2(a+b-c). \tag{2}$$

1. Si $a = 87$, $b = 68$ et $c = 95$, alors $a+b+c = 250$, $-a+b+c = 114$, $a-b+c = 76$, $a = b-c = 60$ et $250 \times 114 \times 76 = 4 \times 95^2 \times 60 = 2166000$, et (2) est vérifié.

2. On doit donc trouver toutes les solutions en entiers de l’équation (2) ; on remarque d’abord les propriétés suivantes :

(i) Si on a une solution (a, b, c) de (2), alors (ka, kb, kc) est aussi solution, pour tout entier $k \geq 1$. On va donc déterminer les solutions avec a, b et c premiers entre eux dans leur ensemble, et alors toutes les solutions seront $(ka, kb, kc), k \geq 1$.

(ii) Puisque h_c est la longueur de la hauteur issue de C, on a $h_c < a$ et $h_c < b$. On déduit de (1) que $c > a$ et $c > b$ et on peut supposer que, par exemple, $a \geq b$.

On pose $u = c - a$, $v = c - b$ et $x = c$; alors $u \geq 1$, $v \geq 1$ et $v \geq u$. On a les égalités $a = x - u$, $b = x - v$ et en remplaçant dans (2), on obtient

$$\begin{aligned} 4x^2(x-u-v) &= (3x-u-v)(x+u-v)(x-u+v) \\ &= (3x-u-v)\big[x^2-(v-u)^2\big] \end{aligned}$$

On en déduit que x est racine du polynôme

$$P(x) = x^3 - 3(u+v)x^2 + 3(v-u)^2x - (v-u)^2(u+v).$$

Nous allons déterminer les racines de ce polynôme, en utilisant les formules de Cardan.

On effectue le changement de variable $X = x - (u+v)$ et on obtient le polynôme

$$\begin{aligned} Q(X) &= \big[X+(u+v)\big]^3 - 3(u+v)\big[X+(u+v)\big]^2 \\ &\quad + 3(u-v)^2\big[X+(u+v)\big] - (v-u)^2(u+v) \\ &= X^3 + 3(u+v)X^2 + 3(u+v)^2X + (u+v)^3 \\ &\quad - 3(u+v)^2X^2 - 6(u+v)^2X - 3(u+v)^3 \\ &\quad + 3(v-u)^2X + 3(v-u)^2(u+v) - (v-u)^2(u+v). \end{aligned}$$

On en déduit $Q = X^3 + pX + q$, avec

$$p = 3(u+v)^2 - 6(u+v)^2 + 3(v-u)^2 = -12uv,$$
$$q = -2(u+v)^3 + 2(v-u)^2(u+v) = -8uv(u+v).$$

On a alors

$$\begin{aligned} 4p^3 + 27q^2 &= -4 \times 12^3 u^3 v^3 + 27 \times 64 u^2 v^2 (u+v)^2 \\ &= 27 \times 64 u^2 v^2 (v-u)^2. \end{aligned}$$

On considere donc, pour appliquer les formules de Cardan,

$$\Delta = \frac{4p^3 + 27q^2}{27} = 64u^2v^2(v-u)^2 \geq 0.$$

(i) Si $v = u$, alors $\Delta = 0$ et $P(x) = x^3 - 6ux^2$; puisque le côté d'un triangle est non nul, P admet l'unique racine valable $x = c = 6u$, et alors $a = b = 5u$; puisque $\mathrm{pgcd}(a,b,c) = 1$, on obtient la solution $a = b = 5, c = 6$.

(ii) Si $v \neq u$, alors $\Delta > 0$ et Q admet une seule racine réelle, $X = U + V$, où

$$U = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}} \ \text{ et } \ V = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}.$$

Puisqu'on a choisi $v > u$, on $\sqrt{\Delta} = 8uv(v-u)$, et

$$U^3 = 4uv(u+v) + 4uv(v-u) = 8uv^2,$$
$$V^3 = 4uv(u+v) - 4uv(v-u) = 8u^2v.$$

On a supposé que $v - u \neq 0$; alors, l'hypothèse $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$ entraîne $\mathrm{pgcd}(u,v) = 1$. En effet, si un entier $d \neq 1$ divise u et v, alors légalité $P(x) = 0$ entraine que d divise $x = c$; alors d divise $a = c - u$ et $b = c - v$, d'où une contradiction.

Puisque u et v sont des entiers tels que $\mathrm{pgcd}(u,v) = 1$, alors uv^2 et u^2v sont des cubes si et seulement si u et v sont des cubes, et donc il existe des entiers s et t tels que $u = s^3$ et $v = t^3$. Alors $U = 2st^2$, $V = 2s^2t$ et on déduit de

$$X = U + V, \ c = x = X + u + v, \ a = x - u, \ b = x - v,$$

que les triangles bien élevés ont pour côtés :

$$a = 2st(s+t) + t^3, \quad b = 2st(s+t) + s^3 \ \text{ et } c = 2st(s+t) + s^3 + t^3,$$

avec $\mathrm{pgcd}(s,t) = 1$, y compris le cas (i) obtenu pour $s = t = 1$.

Remarque.
– Si $s = 2$ et $t = 3$, alors $2st(s+t) = 60$ et on obtient $a = 87$, $b = 68$ et $c = 95$.
– Si $s = 5$ et $t = 7$, alors $2st(s+t) = 1680$ et on obtient $a = 2192$, $b = 2023$ et $c = 2635$.

Marie-Nicole Gras