546-2 Pour bien finir 2022 et débuter 2023...

On demande de montrer que $\dfrac{(2022^2)!}{(2022!)^{2023}}$ est un entier.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout nombre premier p, on note par $v_p(n)$ la puissance de p maximum qui divise n. Nous allons montrer que pour tout nombre premier $p < 2022$, alors $v_p(2022^2!) \geq 2023 v_p(2022!)$.

Soit p un nombre premier, $1013 \leq p \leq 2017$; alors $2p \notin \{1, 2, \ldots, 2022\}$ et donc $v_p(2022!) = 1$. Dans l'entier $2022^2!$, il y a au moins les multiples kp de p, pour $1 \leq k \leq 2022$, et, puisque $p < 2022$, il y a la valeur $k = p$, ce qui entraîne $v_p(2022^2!) \geq 2023$.

... ...

De la même manière, si $p \geq 47$, alors $p^2 \geq 2209 > 2022$, et donc l'ensemble des multiples de p qui appartiennent à $\{1, 2, \ldots, 2022\}$ est égal à

$$p, 2p, \ldots, ap,\ 1 \leq a < p\,;$$

on a donc $ap < 2022$ et $v_p(2022!) = a$.

Il en résulte que l'entier $2022^2!$ comprend au moins $2022a$ multiples de p ; parmi ces entiers, le nombre N de multiples de p^2 vérifie

$$N \geq \frac{2022a}{p} \geq \frac{2022a}{\frac{2022}{a}} = a^2,$$

et donc $v_p(2022^2!) \geq 2022a + a^2 \geq 2023a$, car $a \geq 1$.

Si $2 \leq p \leq 43$, on obtient

p	$v_p(2022!)$	$2023v_p(2022!)$	$v_p(2022^2!)$
2	2014	4074322	4088473
3	1006	2035138	2044237
5	503	1017569	1022116
7	334	675682	681409
11	200	404600	408846
13	166	335818	340704
17	124	250852	255528
19	111	224553	227136
23	90	182070	185838
29	71	143633	146015
31	67	135541	136281
37	55	111265	113567
41	50	101150	102211
43	48	97104	97344

d'où le résultat.

Marie-Nicole Gras