546-3 Une extension de l'inégalité de Nesbitt.

Soient a, b, c des réels strictement positifs. On va montrer l'inégalité

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geq \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}. \qquad (1)$$

Pour montrer (1), il est équivalent de réduire au même dénominateur, et montrer que $F-G\geq 0$, avec

$$F=(b+c)(c+a)(a+b)\sum_{cycl}\Big[a^2(a^2+b^2)(a^2+c^2)\Big],$$

$$G=(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)\sum_{cycl}\Big[a(a+b)(a+c)\Big].$$

On calcule (un logiciel le fait très bien) la différence $F-G$; il y a de nombreux termes identiques dans F et G, et on obtient

$$F-G=\sum_{sym}a^8b+\sum_{sym}a^7bc+\sum_{sym}a^6b^2c-\sum_{sym}a^5b^4-\sum_{sym}a^5b^3c-\sum_{sym}a^5b^2c^2\ ;$$

la notation $\displaystyle\sum_{sym}a^ib^jc^k$ désigne une somme de 6 termes obtenue en considérant les 6 permutations possibles de (a, b, c).

Pour montrer que $F-G\geq 0$, on va utiliser le théorème de Muirhead, dont on rappelle l'énoncé :

Soient $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ des nombres réels tels que

$$\begin{array}{ll} m_1\geq m_2\geq m_3\geq 0, & n_1\geq n_2\geq n_3\geq 0,\\ m_1\geq n_1,\ \ m_2\geq n_2, & m_1+n_1\geq m_2+n_2,\\ m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3\ ; & \end{array}$$

soient a, b, c des nombres réels strictement positifs ; alors, on a

$$\sum_{sym}a^{m_1}b^{m_2}c^{m_3}\geq\sum_{sym}a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}.$$

On déduit de ce thórème

(i) avec $(m_1, m_2, m_3)=(8,1,0)$ et $(n_1, n_2, n_3)=(5,4,0)$ que, $\displaystyle\sum_{sym}a^8b\geq\sum_{sym}a^5b^4$;

(ii) avec $(m_1, m_2, m_3)=(7,1,1)$ et $(n_1, n_2, n_3)=(5,3,1)$ que, $\displaystyle\sum_{sym}a^7bc\geq\sum_{sym}a^5b^3c$;

(iii) avec $(m_1, m_2, m_3)=(6,2,1)$ et $(n_1, n_2, n_3)=(5,2,2)$ que, $\displaystyle\sum_{sym}a^6b^2c\geq\sum_{sym}a^5b^2c^2$.

On a donc montré que $F\geq G$, d'où l'inégalité (1).

Marie-Nicole Gras