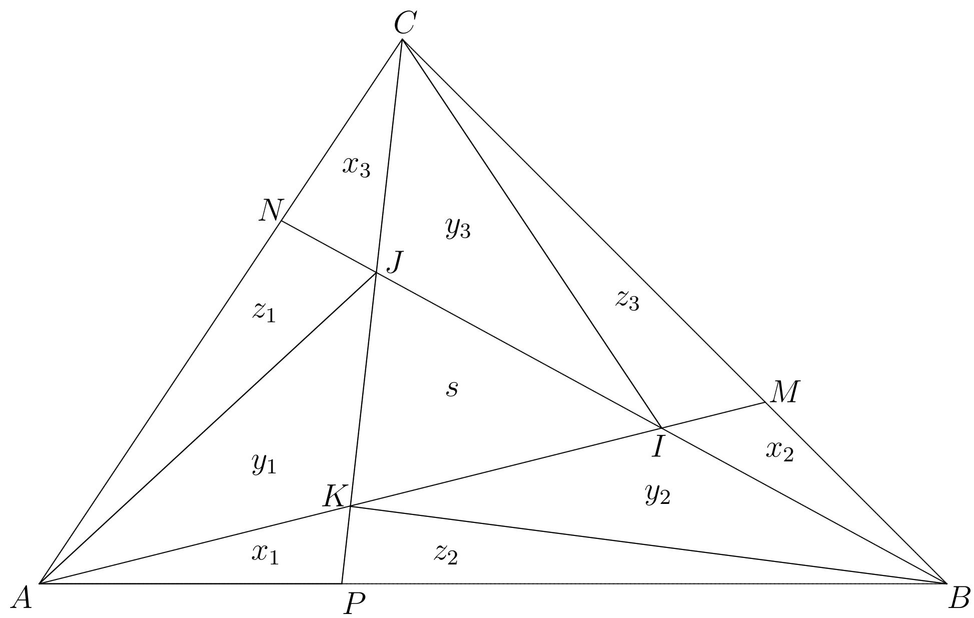
546-4 Heptasection d'un triangle.

En calculant uniquement des aires, nous allons montrer que aire$(IJK) = \frac{1}{7}$aire(ABC) et partager le triangle ABC en 7 triangles d'aires égales.



On trace les segments IB, JC et KA. On désigne par S l'aire du triangle ABC et par s celle du triangle IJK ; les aires de tous les petits triangles sont indiquées sur la figure.

Puisque $PB = 2PA$, on a les égalités d'aires

$$\begin{aligned} \text{aire}(KPB) &= 2\,\text{aire}(KPA), \\ \text{aire}(JPB) &= 2\,\text{aire}(JPA), \\ \text{aire}(CPB) &= 2\,\text{aire}(CPA). \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{cases} z_2 = 2x_1 \\ s + y_2 = 2y_1 \\ y_3 + z_3 + x_2 = 2(x_3 + z_1)\,; \end{cases} \tag{1}$$

par permutation circulaire des indices 1,2,3, on en déduit 6 autres relations.

On a donc obtenu, d'abord

$$z_2 = 2x_1, \quad z_3 = 2x_2 \text{ et } z_1 = 2x_3.$$

On déduit de la troisième équation de (1)

$$y_3 = 2x_3 + 2z_1 - z_3 - x_2 = 6x_3 - 3x_2,$$

et par permutation circulaire des indices 1,2,3, on obtient

$$y_1 = 6x_1 - 3x_3 \ \text{ et } \ y_2 = 6x_2 - 3x_1.$$

On déduit de la deuxième équation de (1)

$$s = 2y_1 - y_2 = 12x_1 - 6x_3 - 6x_2 + 3x_1 = 15x_1 - 6x_2 - 6x_3,$$

et par permutation circulaire des indices 1,2,3, on obtient 2 autres expressions de s ; en considérant les 2 premières, on obtient

$$15x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 15x_2 - 6x_3 - 6x_1 \iff 21x_1 = 21x_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &x_1 = x_2 = x_3 =: x, \\ &s = 3x, \\ &y_1 = y_2 = y_3 = 3x, \\ &z_1 = z_2 = z_3 = 2x, \end{aligned}$$

et

$$S = 3(x) + 3x + 3(3x) + 3(2x) = 21x\,;$$

on a donc obtenu $x = \dfrac{S}{21}$ et $s = 3x = \dfrac{S}{7}\cdot$

On a ainsi déterminé la valeur des aires de tous les petits triangles et partagé le triangle ABC en 7 triangles d'aire $\dfrac{S}{7}$, à savoir les triangles

$$\begin{aligned} &IJK, \\ &IJC,\ JKA,\ KIB, \\ &IBC,\ JCA,\ KAB. \end{aligned}$$

Marie-Nicole Gras