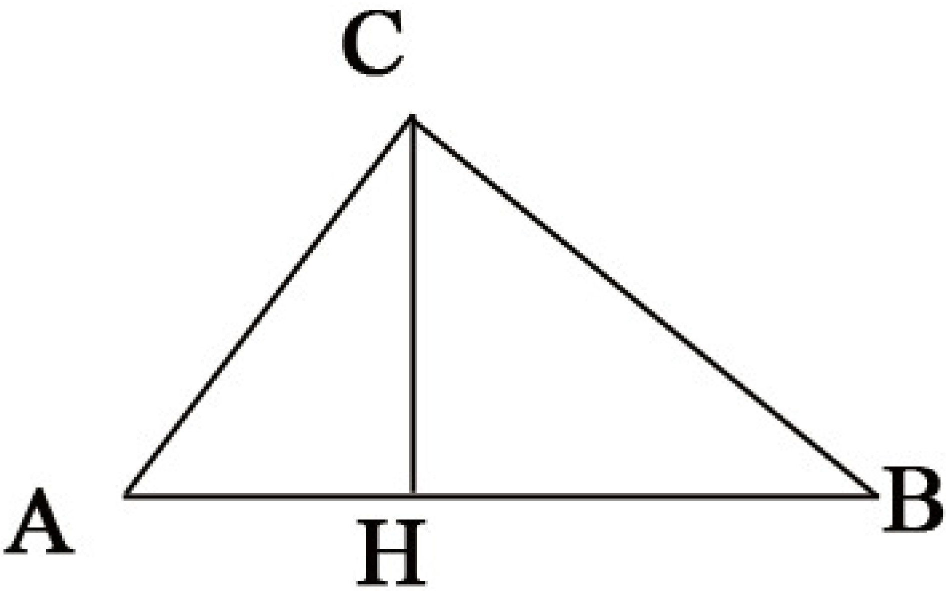
Exercice 546 - 1

A la recherche des triangles bien élevés avec leurs cotés entiers.
Si un triangle est bien élevé alors on peut en trouver toute une famille en multipliant chaque coté par un même entier, ou en divisant jusqu'à trouver des cotés entiers premiers entre eux.



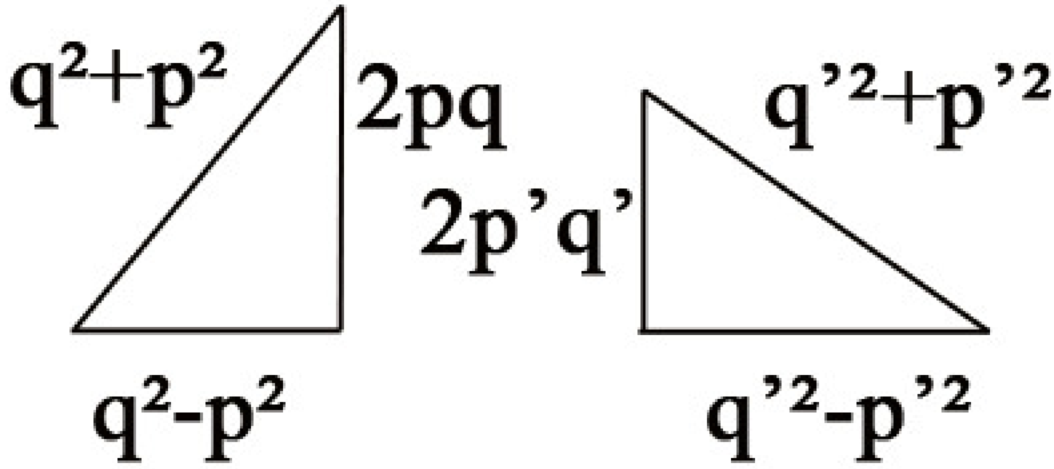
Commençons par voir que AH et HB sont des entiers.
AC, AB et BC sont des entiers et comme CH=AC+BC-AB est un entier.

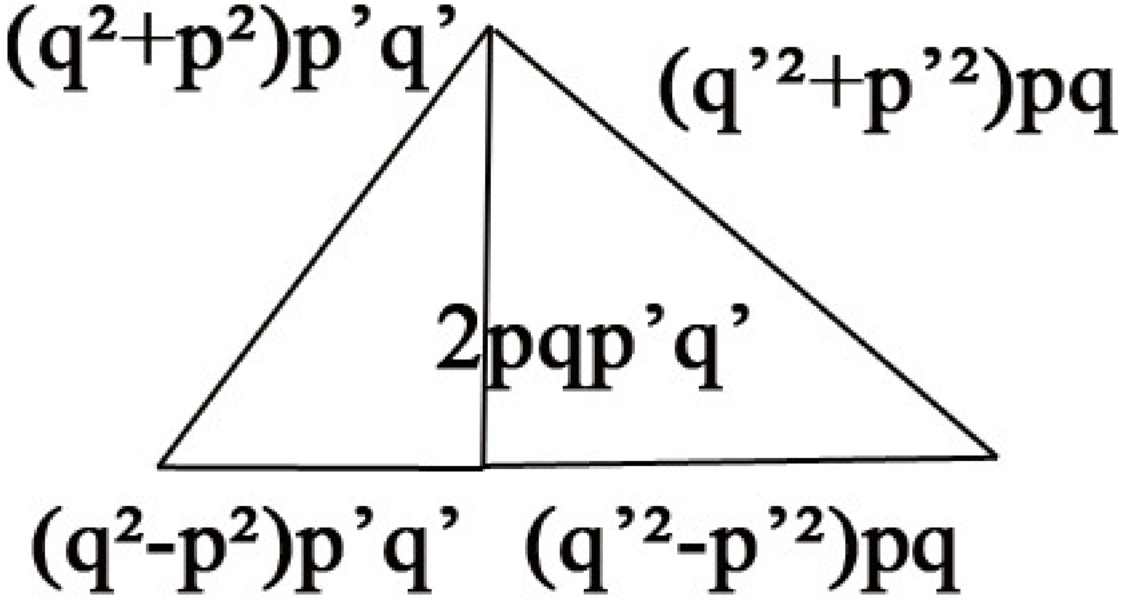
On va faire une démonstration par l'absurde en supposant que AH et AB ne sont pas des entiers. Ainsi quand on regarde le triangle ACH on a $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}$ et comme AH n'est pas un entier AH est de la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers et b n'est pas un carré. Comme BH=AB-AH, BH n'est pas un entier donc HB est de la forme $a'\sqrt{b'}$ où a' et b' sont des entiers et b' n'est pas un carré. Ainsi $AB=a\sqrt{b}+a'\sqrt{b'}$ ne peut pas être un entier. On a donc une contradiction et AH et HB sont des entiers.

A tout triangle rectangle on peut associer un triangle pythagoricien primitif en divisant chaque coté par le pgcd des trois cotés.

On va montrer que pour tout triangle pythagoricien primitif, il existe autre triangle pythagoricien associé qui permet de construire un triangle bien élevé.
Pour plus d'informations sur les triangles pythagoriciens on peut voir https://images.math.cnrs.fr/A-la-recherche-des-triplets-pythagoriciens.html et on va utiliser les mêmes notations.

On prend deux triangles pythagoriciens (p,q) et (p',q')que l'on recolle ainsi





Pour qu'il soit bien élevé il faut

$(q^2+p^2)p'q'+(q'^2+p'^2)pq = 2pqp'q'+(q^2-p^2)p'q'+(q'^2-p'^2)pq$

Soit

$q^2p'q'+p^2p'q'+q'^2pq+p'^2pq = 2pqp'q'+q^2p'q'-p^2p'q'+q'^2pq-p'^2pq$

et en simplifiant

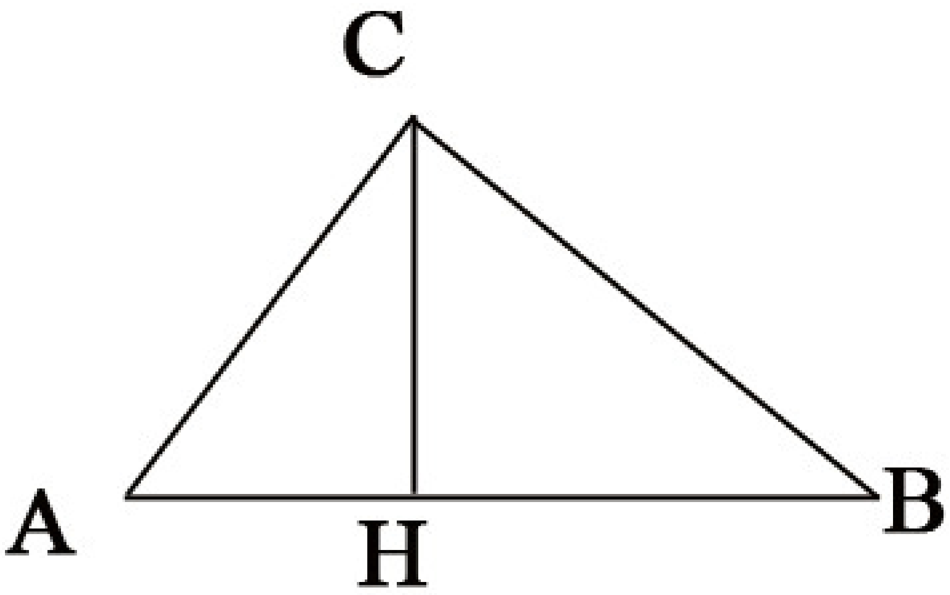
$p^2p'q'+p'^2pq = 2pqp'q'-p^2p'q'-p'^2pq$

Soit $2p^2p'q'+2p'^2pq = 2pqp'q'$ et en divisant par $2pqp'q'$, on obtient $\frac{2p^2p'q'}{2pqp'q'}+\frac{2p'^2pq}{2pqp'q'}=\frac{2pqp'q'}{2pqp'q'}$

soit $\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=1$

Ce qui permet de créer des triangles bien élevés.

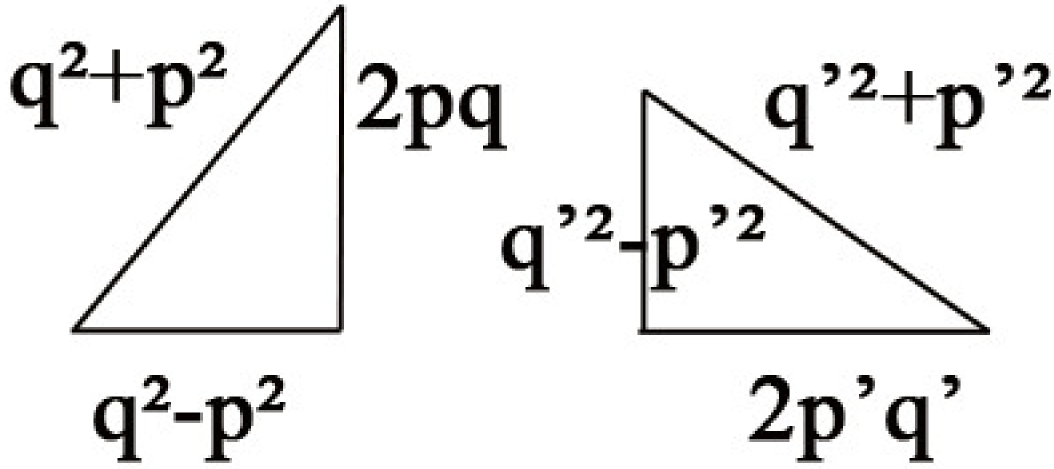
Voici les "premiers" en utilisant le fait que p et q sont de parités différentes

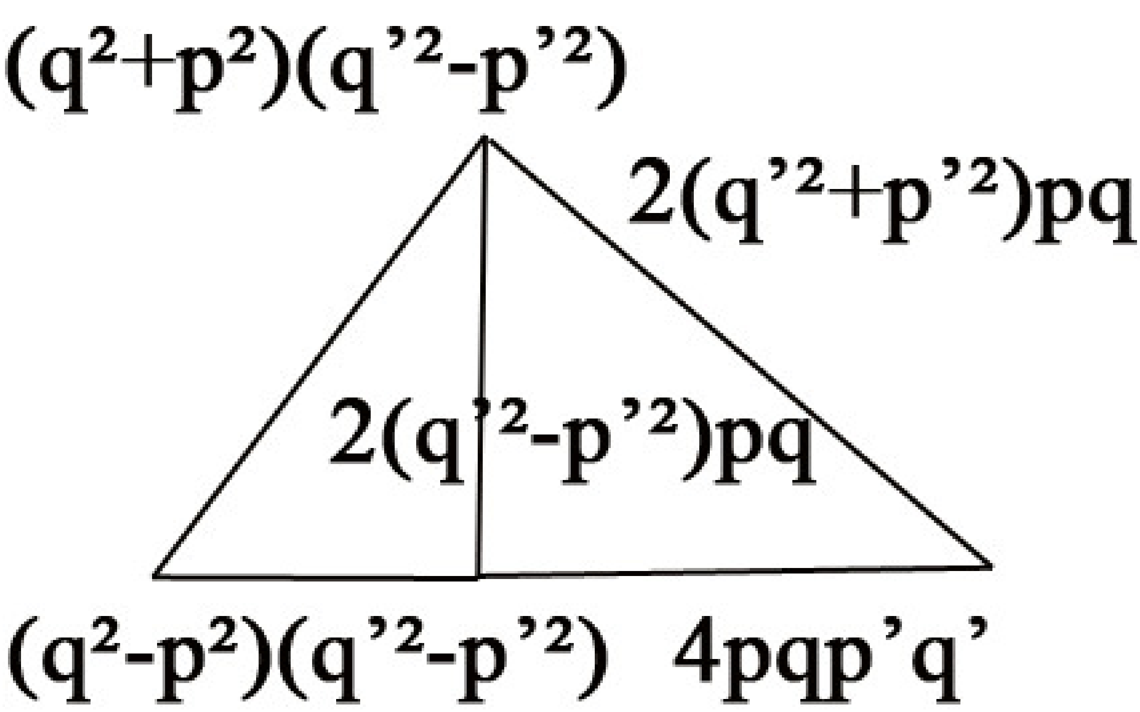


p=1, q=2, p'=1, q'=2, AC=5, BC=5, AH=3, BH=3, AB=6, CH=4, AC+BC=10=AB+CH.
p=2, q=3, p'=1, q'=3, AC=13, BC=20, AH=56, BH=16, AB=21, CH=12, AC+BC=33=AB+CH.
p=1, q=4, p'=3, q'=4, AC=51, BC=25, AH=45, BH=7, AB=52, CH=24, AC+BC=76=AB+CH
p=2, q=5, p'=3, q'=5, AC=87, BC=68, AH=63, BH=32, AB=95, CH=60, AC+BC=155=AB+CH (*)
p=4, q=5, p'=1, q'=5, AC=41, BC=104 ,AH=9, BH=96, AB=105, CH=40, AC+BC=145=AB+CH
p=1, q=6, p'=5, q'=6, AC=185, BC= 61, AH=175, BH=11, AB=186, CH=60, AC+BC=246=AB+CH
p=1, q=7, p'=6, q'=7, AC=300, BC=85, AH=288, BH=13, AB=301, CH=84, AC+BC=385=AB+CH
p=2, q=7, p'=5, q'=7, AC=265, BC=148, AH=225, BH=48, AB=273, CH=140, AC+BC=413=AB+CH
p=4, q=7, p'=3, q'=7, AC=195, BC=232, AH=99, BH=160, AB=259, CH=168, AC+BC=427=AB+CH
p=6, q=7, p'=1, q'=7, AC=85, BC=300, AH=13, BH=288, AB=301, CH=84, AC+BC=385=AB+CH
p=1, q=8, p'=7, q'=8, AC=455, BC=113, AH=441, BH= 15, AB=456, CH=112, AC+BC=568=AB+CH
p=3, q=8, p'=5, q'=8, AC=365, BC=267, AH=275, BH=117, AB=392, CH=240, AC+BC=632=AB+CH
p=2, q=9, p'=7, q'=9, AC=595, BC=260, AH=539, BH=64, AB=603, CH=252, AC+BC=855=AB+CH
p=4, q=9, p'=5, q'=9, AC=485, BC=424, AH=325, BH=224, AB=549, CH=360, AC+BC=909=AB+CH
p=8, q=9, p'=1, q'=9, AC=145, BC=656, AH=17, BH=640, AB=657, CH=144, AC+BC=801=AB+CH

(*) est l'exemple de la question 1

Si l'on recolle dans "l'autre sens"





On a alors

$$(q^2+p^2)(q'^2-p'^2)+2(q'^2+p'^2)pq=(q^2-p^2)(q'^2-p'^2)+4pqp'q'+2(q'^2+p'^2)pq$$

$$q^2q'^2-q^2p'^2+p^2q'^2-p^2p'^2+2q'^2pq+2p'^2pq=q^2q'^2-q^2p'^2-p^2q'^2+p^2p'^2+4pqp'q'+2q'^2pq-2p'^2pq$$

$$p^2q'^2-p^2p'^2+2p'^2pq=-p^2q'^2+p^2p'^2+4pqp'q'-2p'^2pq$$

$$2p^2q'^2-2p^2p'^2+4p'^2pq-4pqp'q'=0$$

$$pq'^2-pp'^2+2p'^2q-2qp'q'=0 \quad (*)$$

$$q'(pq'-2qp')-p'(pp'-2qp')=0$$

$$q'(pq'-2qp')=p'(pp'-2qp')$$

p' et q' sont premiers entre eux donc q' divise pp'-2qp' donc q' divise pp' et ainsi q' divise p'
de (*) il vient

$$p(q'^2-p'^2)-q(2p'q'-2p'^2)=0$$

$$p(q'^2-p'^2)=q(2p'q'-2p'^2)$$

$$p(q'^2-p'^2)=2p'q(q'-p')$$

$$p(q'+p')=2p'q$$

on a donc $p = p'$ et $(q'+p') = 2q$ soit $q' = 2q - p' = 2q - p$
On pense que l'on a construit une deuxième famille en recollant différemment et bien non.
Dans le premier cas on a associé les triangles par $(p,q) \to (q-p,q)$
On a alors
$AC = (q^2+p^2)(q-p)q$
$BC = (q+(q-p)^2)pq = 2pq^3 - 2p^2q^2 + p^3q$
$AH = (q^2-p^2)(q-p)q = q^4 - pq^3 - p^2q^2 + p^3q$
$HB = (q^2-(q-p)^2)pq = 2p^2q^2 - p^3q$

Dans le deuxième cas on a associé les triangles par $(p,q) \to (p,2q-p)$
On a alors
$AC = (q^2+p^2)((2q-p)^2-p^2) = (q^2+p^2)(4q^2-4pq) = 4(q^2+p^2)(q-p)p$
$BC = 2((2q-p)^2+p^2)pq = 2(4q^2-4pq+2p^2)pq = 8pq^3 - 8p^2q^2 + 4p^3q$
$AH = (q^2-p^2)((2q-p)^2-p^2) = (q^2-p^2)(4q^2-4pq) = (q^2-p^2)(q-p)q \times 4$
$HC = 4pqp(2q-p) = 8p^2q^2 - 4p^3q$

On a bien la même famille de triangle bien élevé $(p,q) \to AC, BC, AB$
$(p,q) \to (q^2+p^2)(q-p)q, 2pq^3 - 2p^2q^2 + p^3q, q^4 - pq^3 + p^2q^2$
On peut diviser par q
$(p,q) \to (q^2+p^2)(q-p), 2pq^2 - 2p^2q + p^3, q^3 - pq^2 + p^2q$

Soit d=pqcd(AC,BC,AB), on suppose d>1
Alors d divise AC, BC et AB donc d divise CH=AC+BC-AB or $CH = 2pq(q-p)$
Mais comme p et q sont de parités différentes $(q^2+p^2)(q-p)$ est impair donc d ne divise pas 2
Si d divise p, comme $AB = q^3 - pq^2 + p^2q$, alors d divise q.
Si d divise q , comme $AC = q^3 - pq^2 + p^2q - p^3$ alors d divise p.
Comme p et q sont premiers entre eux il ne divise ni p ni q et pas plus q-p donc d=1 et
$(p,q) \to q^3 - pq^2 + p^2q - p^3, 2pq^2 - 2p^2q + p^3, q^3 - pq^2 + p^2q$ est un triangle bien élevé, primitif.

En python avec un dictionnaire en compréhension

```
import math
def triangle_bien_eleve_primitif(n):
    return [{"p":p,"q":q,"AC":(q**2+p**2)*(q-p),"BC":2*p*q**2-2*(p**2)*q+p**3,"AC":q**3-p*q**2+(p**2)*q} for q in range (2,n) for p in range(1,q) if math.gcd(p,q)==1 and (p%2)*(q%2)==0  and not((q%2==0)*( p>q//2))]
print(triangle_bien_eleve_primitif(20))
```

Cas où les cotés ne sont pas des entiers

A et B étant fixé par $A\left(\frac{-1}{2};0\right)$ et $B\left(\frac{1}{2};0\right)$

On va montrer que quelque soit $x \in \left]\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right[$ alors il existe un unique point C d'ordonné positive s(x)

tel que ABC soit bien élevé.

Soit $C(a;h)$ on a $\overrightarrow{AC}\left(a+\frac{1}{2};h\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(a-\frac{1}{2};h\right)$, $AC = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + h^2}$, $BC = \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + h^2}$

Pour être bien élevé, il faut $\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+h^2}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+h^2}=h+1$

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+h^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+h^2+2\sqrt{\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)\left(\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)}=h^2+2h+1$$

$$a^2+a+\frac{1}{4}+h^2+a^2-a+\frac{1}{4}+h^2+2\sqrt{\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)\left(\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)}=h^2+2h+1$$

$$2\sqrt{\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)\left(\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)}=-h^2+2h+\frac{1}{2}-2a^2$$

$$4\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)\left(\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+h^2\right)=\left(-h^2+2h+\frac{1}{2}-2a^2\right)^2$$

$$4\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)^2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+h^2\left(\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\right)+h^4\right)=\left(-h^2+2h+\frac{1}{2}-2a^2\right)^2$$

$$4\left(\left(a^2-\frac{1}{4}\right)^2+h^2\left(2a^2+\frac{1}{2}\right)+h^4\right)=\left(-h^2+2h+\frac{1}{2}-2a^2\right)^2$$

$$4\left(a^4-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{16}+2a^2h^2+\frac{1}{2}h^2+h^4\right)=\left(-h^2+2h+\frac{1}{2}-2a^2\right)^2$$

$$4a^4-2a^2+\frac{1}{4}+8a^2h^2+2h^2+4h^4=h^4+4h^2+\frac{1}{4}+4a^4-4h^3-h^2+2h-8a^2h-2a^2$$

$$8a^2h^2+2h^2+4h^4=h^4+4h^2-4h^3-h^2+2h-8a^2h$$

$$4a^2h^2-h^2+3h^4+8a^2h+4h^3-2h=0$$

$$4a^2h-h+3h^3+8a^2+4h^2-2=0$$

$$h^3+\frac{4}{3}h^2+\frac{(4a^2-1)}{3}h+2\frac{(4a^2-1)}{3}=0$$

On pose $h=y-\frac{4}{9}$ et $k=\frac{(4a^2-1)}{3}$

$$\left(y-\frac{4}{9}\right)^3+\frac{4}{3}\left(y-\frac{4}{9}\right)^2+k\left(y-\frac{4}{9}\right)+2k=0$$

$$y^3-\frac{4}{3}y^2+\frac{48}{81}y-\frac{64}{729}+\frac{4}{3}\left(y^2-\frac{8}{9}y+\frac{16}{81}\right)+ky-\frac{4}{9}k+2k=0$$

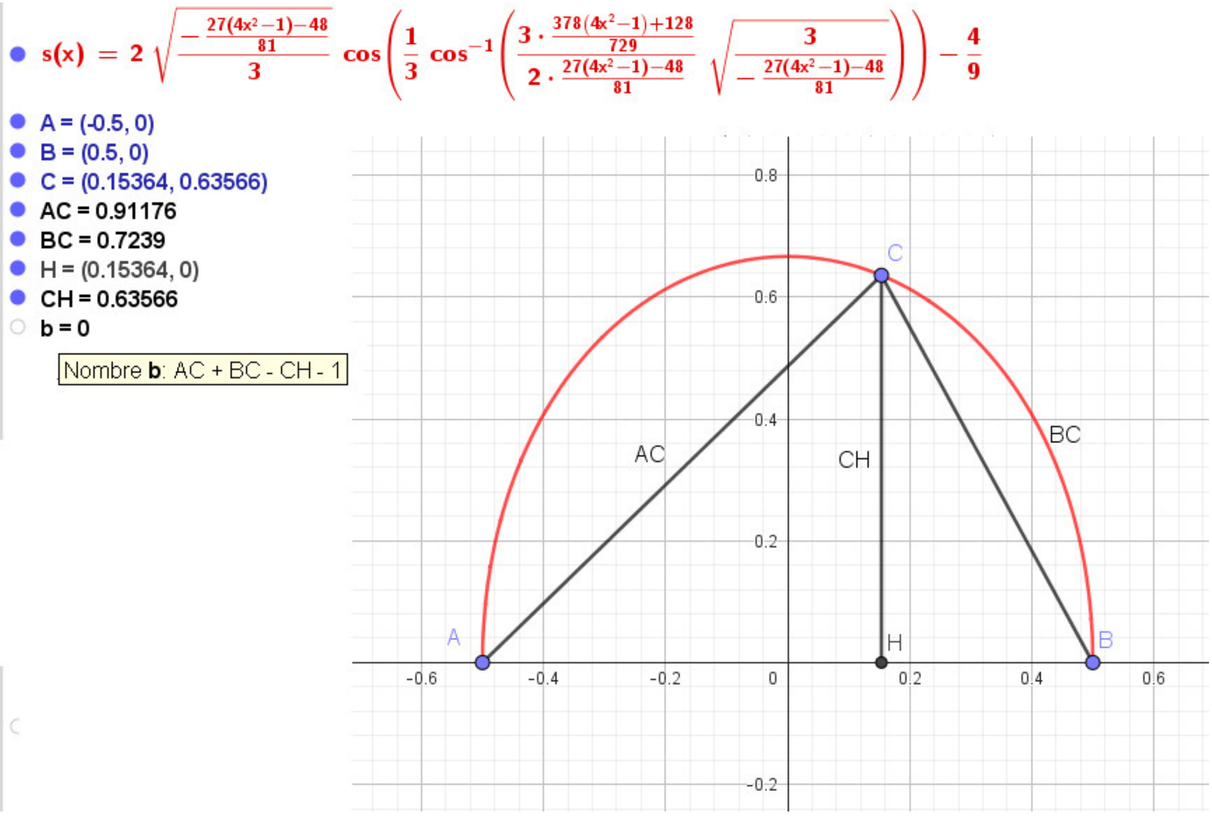
$$y^3-\frac{4}{3}y^2+\frac{16}{27}y-\frac{64}{729}+\frac{4}{3}y^2-\frac{32}{27}y+\frac{64}{243}+ky-\frac{4}{9}k+2k=0$$

$$y^3+\left(k+\frac{16}{27}-\frac{32}{27}\right)y-\frac{64}{729}+\frac{192}{729}+\frac{14}{9}k=0$$

$$y^3+\left(-\frac{16}{27}+k\right)y+\left(\frac{128}{729}+\frac{14}{9}k\right)=0$$

On peut appliquer la formule de Cardan et on obtient

$$y=\frac{2}{9}\sqrt{25-36x^2}\,cos\left(\frac{1}{3}arccos\left(\frac{125-756x^2}{(25-36x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)-\frac{4}{9}$$



Ce qui n'apporte pas vraiment grand chose sauf à voir ici aussi que si x est un rationnel $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right[$ cela forme un triangle BCH et il n'y a qu'un seul triangle ACH associé.