Exercice 546-2

On va montrer que $\frac{n^2!}{n!^{n+1}}$ est un entier et on va regarder comment est cet entier

On note S_n le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments. $card(S_n)=n!$

On a donc $card\left(S_{n^2}\right)=n^2!$.

On va regarder n^2 comme une matrice carrée $n\times n$.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3...n-1 & n \\ n+1 & n+2 & n+3...2n-1 & 2n \\ ... & ... & ... & ... \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3...n^2-1 & n^2 \end{bmatrix}$$

On considère $(s_1,s_2,...,s_n,t)$ les n+1-uplets composés d'éléments de S_n. Les s_i sont des éléments de S_n qui permutent les éléments de la ligne i et t permute juste les lignes de la matrice.

On considère E les $(n!)^{n+1}$ éléments de S_{n^2} de la forme $\pi=t\circ s_n\circ...\circ s_1$ et on va montrer que c'est un sous groupe de S_{n^2}.

L'image de A par un élément de E est donc une matrice ou chaque ligne est une permutation d'une des lignes A.

Voici un exemple avec $\pi=(1,2)\circ(1,2)\circ...\circ(1,2)$ où $(1,2)$ est la transposition de S_n qui échange le premier deuxième élément.

$$\pi(A)=\begin{bmatrix} n+2 & n+1 & n+3...2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 3...n-1 & n \\ ... & ... & ... & ... \\ n^2-n+2 & n^2-n+1 & n^2-n+3...n^2-1 & n^2 \end{bmatrix}$$

$id=id\circ id\circ...\circ id$ est l'élément neutre de E.

Si π_1 et π_2 alors $\pi_1\circ\pi_2$ est un élément de E. L'image de A par $\pi_1\circ\pi_2$ est une matrice ou chaque ligne est une permutation d'une des lignes A, $\pi_1\circ\pi_2$ est bien un élément de E.

L'élément symétrique de $\pi=t\circ s_n\circ...\circ s_1$ est un élément de E, c'est celui composé de chaque permutation qui remet chaque ligne en ordre croissant et de t^{-1}, le symétrique de t

E est bien un sous groupe de S_{n^2} et comme le cardinal d'un sous groupe divise le cardinal du groupe alors $\frac{n^2!}{n!^{n+1}}$ est bien un entier

Que dire sur $\frac{n^2!}{n!^{n+1}}$?

$$\frac{n^2!}{n!^{n+1}}=\frac{n^2!}{1^{n+1}\times 2^{n+1}\times...\times(n-1)^{n+1}\times n^{n+1}}$$

$$n^2!=1\times 2\times...\times(n-1)\times n\times(n+1)\times...\times 2n\times...\times 3n\times...\times(n-1)n\times...\times\left(n^2-1\right)\times n^2$$

$$n^2!=1\times 2\times...\times(n-1)\times 1\times(n+1)\times...\times 2\times...\times 3\times...\times(n-1)\times...\times\left(n^2-1\right)\times 1\times n^{n+1}$$

$$\frac{n^2!}{n^{n+1}}=1\times 2\times...\times(n-1)\times 1\times(n+1)\times...\times 2\times...\times 3\times...\times(n-1)\times...\times\left(n^2-1\right)\times 1$$

On sait que l'on a assez de facteurs $(n-1)$ pour avoir

$$\frac{n^2!}{n^{n+1}\times(n-1)^{n+1}}=1\times2\times...\times1\times1\times(n+1)\times...\times2\times...\times3\times...\times1\times...\times(n^2-1)\times1$$ et ainsi de suite pour mettre les n premiers facteurs à 1.

$$\frac{n^2!}{(n!)^{n+1}}=1\times1\times...\times1\times1\times...\times p\times...\times1$$

A la manière du crible d'Eratostène entre les facteurs n et n^2, il reste les nombres premiers (et autres choses).

Donc $\prod_{n<p_i<n^2} p_i^i$ divise $\frac{n^2!}{(n!)^{n+1}}$

Voici ce qui se passe avec n=5

$$5^2!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18\times19\times20\times21\times22\times23\times24\times25$$

On divise par les 6 multiples de 5.

$$\frac{5^2!}{5^6}=1\times2\times3\times4\times1\times6\times7\times8\times9\times2\times11\times12\times13\times14\times3\times16\times17\times18\times19\times4\times21\times22\times23\times24\times1$$

On divise par les 6 multiples de 4.

$$\frac{5^2!}{5^6\times4^6}=1\times2\times3\times1\times1\times6\times7\times2\times9\times2\times11\times3\times13\times14\times3\times1\times17\times18\times19\times1\times21\times22\times23\times24\times1$$

On divise par les 6 multiples de 3.

$$\frac{5^2!}{5^6\times4^6\times3^6}=1\times2\times1\times1\times1\times2\times7\times2\times1\times2\times11\times1\times13\times14\times1\times1\times17\times18\times19\times1\times21\times22\times23\times24\times1$$

On termine par les 6 multiples de 2.

$$\frac{5^2!}{5^6\times4^6\times3^6\times2^6}=1\times1\times1\times1\times1\times1\times7\times1\times1\times1\times11\times1\times13\times7\times1\times1\times17\times9\times19\times1\times21\times22\times23\times24\times1$$

Ainsi $\frac{n^2!}{(n!)^{n+1}\times\prod_{n<p_i<n^2} p_i^i}$ est un entier.

Conjecture

Après un peu de programmation, il semblerait que n^2-1divise $\frac{n^2!}{(n!)^{n+1}\times\prod_{n<p_i<n^2} p_i^i}$