Problème 546 - 2

On peut appliquer le théorème de Rouch qui est une conséquence de Ménélaüs

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Routh

Théorème de Routh

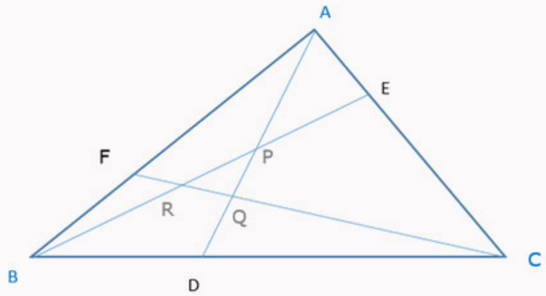
En géométrie euclidienne, **le théorème de Routh** exprime le rapport entre l'aire d'un triangle et celle du triangle formé par trois céviennes.

Énoncé

Soit un triangle ABC. Trois céviennes issues des trois sommets coupent les côtés opposés en *D*, *E*, *F*, et découpent un triangle PQR.

Si l'on pose : $x = \dfrac{DC}{DB}, y = \dfrac{EA}{EC}, z = \dfrac{FB}{FA}$, alors l'aire du triangle PQR est donnée par la formule :

$$S_{PQR} = S_{ABC} \times \frac{(xyz-1)^2}{(xz+x+1)(yx+y+1)(zy+z+1)}$$



- Remarque : si les céviennes sont concourantes, l'aire du triangle est nulle, et l'on retrouve le théorème de Ceva ($xyz = 1$).
- Application : si $x = y = z = 2$, le rapport est de $\frac{1}{7}$, triangle central du partage du triangle en sept triangles de même aire.

Démonstration

On applique le théorème de Ménélaüs au triangle ABD, coupé par la droite (CF) : $\dfrac{FA}{FB} \times \dfrac{CB}{CD} \times \dfrac{QA}{QD} = 1.$

D'où $\dfrac{QA}{QD} = \dfrac{FB}{FA} \times \dfrac{CD}{CB} = \dfrac{zx}{x+1}.$

L'aire du triangle AQC vaut $S_{AQC} = \dfrac{AQ}{AD} \times S_{ADC} = \dfrac{AQ}{AD} \times \dfrac{DC}{BC} \times S_{ABC} = \dfrac{x}{zx+x+1} \times S_{ABC}$

Par permutation circulaire, on obtient $S_{APB} = \dfrac{y}{xy+y+1} S_{ABC}$ et $S_{BRC} = \dfrac{z}{yz+z+1} S_{ABC}$.

L'aire du triangle PQR vaut donc :

$$S_{PQR} = S_{ABC} - S_{AQC} - S_{APB} - S_{BRC} = S_{ABC} \times \left(1 - \frac{x}{zx+x+1} - \frac{y}{xy+y+1} - \frac{z}{yz++1}\right)$$

Ou encore $S_{PQR} = S_{ABC} \times \dfrac{(xyz-1)^2}{(xz+x+1)(yx+y+1)(zy+z+1)}$

Dans notre exercice

$$\frac{PB}{PA} = \frac{MC}{MB} = \frac{NA}{NC} = 2$$

$$\frac{S_{IJK}}{S_{ABC}} = \frac{(xyz-1)^2}{(xz+x+1)(yx+x+1)(zy+z+1)} = \frac{(2\times2\times2-1)^2}{(2\times2+2+1)^3} = \frac{7^2}{7^3} = \frac{1}{7}$$