Problème 546 - 4

HEPTASECTION

La solution ci-dessous utilise les coordonnées barycentriques. Peut-être du point de vue de l'auteur cela appartient-il (n'appartient-il pas ?) à la géométrie analytique ? en tout cas, la voici.

Il est aisé de donner, dans le repère A(1,0,0) , B (0,1,0), C (0,0,1), les coordonnées barycentriques des points de la figure. Un point quelconque est déterminé par ses coordonnées (x, y, z).

D'abord, M (0,2,1), N (1,0,2), et P (2,1,0).

L'équation barycentrique de AM est donc $y = 2z$, et on obtient de même en permutant celles de BN et CP

L'intersection I de AM ($y = 2z$) et BN ($z = 2x$) est alors I (1,4,2).

On obtient de même J (2,1,4) et K (4,2,1).

Il reste à calculer l'aire de IJK, qui est donnée par le déterminant des coordonnées barycentriques de ces points une fois ramenées à avoir une somme égale à 1. Alors :

Aire (ABC)= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$=1 et Aire (IJK)= $\begin{vmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7}$.