Exercice 546-2

Voici une démonstration de mon collègue d'Andorre Jordi Ordonez, plus abordable pour les élèves de terminales

On va montrer que $\dfrac{n^2!}{n!^{n+1}}$ est un entier et on va regarder comment est cet entier à l'aide des coefficients binomiaux.
A nouveau, on va regarder n^2 comme une matrice carrée $n\times n$.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3...n-1 & n \\ n+1 & n+2 & n+3...2n-1 & 2n \\ ... & ... & ... & ... \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3...n^2-1 & n^2 \end{bmatrix}$$

Le produit de chaque ligne est $n!$, $\dfrac{(2n)!}{n!}$, $\dfrac{(3n)!}{(2n)!}$, , $\dfrac{((k+1)n)!}{(kn)!}$, ..., $\dfrac{(n^2)!}{(n^2-n)!}$

C'est à dire $n^2!=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{(kn)!}{((k-1)n)!}=n!\times\frac{(2n)!}{n!}\times\frac{(3n)!}{(2n)!}\times\frac{(4n)!}{(3n)!}\times...\times\frac{((n-1)n)!}{((n-2)n)!}\times\frac{(n^2)!}{((n-1)n)!}$

On multiplie tous les facteurs par $\dfrac{n!}{n!}$

$$n^2!=\prod_{k=1}^{n}\frac{(kn)!}{(kn-n)!\times n!}\times n!=n!\times n!\times\frac{(2n)!}{n!\times n!}\times n!\times\frac{(3n)!}{(2n)!\times n!}\times n!\times n!\times...\times\frac{((n-1)n)!}{((n-2)n)!\times n!}\times n!\times\frac{(n^2)!}{((n-1)n)!\times n!}\times n!$$

On reconnaît le coefficient binomial

$$\binom{kn}{n}=\frac{(kn)!}{(kn-n)!\times n!}$$

Quel l'on transforme en

$$\binom{kn}{n}=\frac{(kn)!}{(kn-n)!\times n!}=\frac{1\times...\times(kn-1)\times kn}{(kn-n)!\times 1\times...\times(n-1)\times n}=\frac{1\times...\times(kn-1)\times k}{((kn-1)-(n-1))!\times 1\times...\times(n-1)}=\binom{kn-1}{n-1}\times k$$

On vient de montrer que k divise $\dbinom{kn}{n}$.

Ainsi $n^2!=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{(kn)!}{(kn-n)!\times n!}\times n!=\prod_{k=1}^{n}\binom{kn}{n}\times n!=\prod_{k=1}^{n}\binom{kn-1}{n-1}\times k\times n!=\prod_{k=1}^{n}\binom{kn-1}{n-1}\times\prod_{k=1}^{n}k\times\prod_{k=1}^{n}n!$

Donc $n^2!=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\binom{kn-1}{n-1}\times\left(n!\times(n!)^n\right)=(n!)^{n+1}\prod_{k=1}^{n}\binom{kn-1}{n-1}$

et finalement $\dfrac{n^2!}{(n!)^{n+1}}=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\binom{kn-1}{n-1}$ et comme les coefficients binomiaux sont des entiers $\dfrac{n^2!}{(n!)^{n+1}}$ est bien un entier.