Les factorielles

Daniel PERRIN

Il s'agit de montrer que $\dfrac{(2022^2)!}{(2022!)^{2023}}$ *est un entier.*

Comme le dit Brassens, le temps ne fait rien à l'affaire, on montre plus généralement que, pour tout n entier, $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ est un entier. Comme les coefficients binomiaux sont des entiers, cela résulte du théorème suivant :

0.1 Théorème. *Pour* $n \geq 1$ *on a la formule :*

$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n^2-1)!}{((n-1)!)^{n+1}\, n^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n} \binom{kn-1}{n-1}.$$

Démonstration. C'est une vérification sans difficulté, les factorielles se simplifiant entre numérateur et dénominateur.