546-1 Un triangle bien élevé

Dans un triangle ABC, on note a, b, c les longueurs des côtés [BC], [CA], [AB].

On note h la longueur de la hauteur issue de A.

On note S l'aire du triangle ABC.

Alors : $2 \cdot a \cdot h = 4 \cdot S = \sqrt{(a+b+c)\cdot(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)}$

L'égalité $h + a = b + c$ se traduit par :

$$(a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c) = 4\cdot a^2 \cdot(-a+b+c) \qquad \text{(E)}$$

Question 1

Si l'on choisit : $\begin{cases} a = 95 \\ b = 87 \\ c = 68 \end{cases}$ alors l'égalité (E) est vérifiée et le triangle est bien élevé.

Question 2

L'équation (E) étant homogène, on va chercher les solutions primitives avec a, b, c premiers entre eux une solution générale s'obtenant ensuite on multipliant a, b, c par une constante.

On pose : $\begin{cases} u = -a+b+c \\ v = a-b+c \\ w = a+b-c \end{cases}$

L'égalité (E) s'écrit alors : $(u+v+w)\cdot v \cdot w = (v+w)^2 \cdot u$

Les quatre nombres u, v, w, $u+v+w$ sont des entiers de même parité.

S'ils étaient tous les quatre impairs, le premier membre serait impair et le second pair.

Ils sont donc tous les quatre pairs.

En notant : $\begin{cases} u = 2 \cdot x \\ v = 2 \cdot y \\ w = 2 \cdot z \end{cases}$ l'égalité (E) s'écrit : $(x + y + z) \cdot y \cdot z = (y + z)^2 \cdot x$

La somme et le produit des nombres y et z sont : $\begin{cases} s = y + z = a \\ p = y \cdot z = \dfrac{a^2 \cdot x}{x + y + z} = \dfrac{a^2 \cdot x}{x + a} \end{cases}$

Les nombres y et z sont les racines du polynôme du second degré $X^2 - s \cdot X + p$

Le discriminant Δ est : $\Delta = s^2 - 4p = a^2 \cdot \dfrac{a - 3x}{a + x}$

Soit d le PGCD de a et x : $\begin{cases} a = d \cdot a' \\ x = d \cdot x' \end{cases}$ avec a' et x' premiers entre eux

Soit d' le PGCD de $a' - 3x'$ et $a' + x'$

Le nombre d' divise $4a' = a' - 3x' + 3 \cdot (a' + x')$ et $4x' = a' + x' - (a' - 3x')$. Donc il divise 4.

$yz \cdot (x + a) = a^2 \cdot x$ donc : $yz \cdot (x' + a') = d^2 \cdot a'^2 \cdot x'$

Si y et z sont de parités distinctes, alors $a = y + z$ est impair et x est pair.
Donc $x + a$ et $x' + a'$ sont impairs et $d' = 1$.

Si y et z sont pairs, alors x est impair puisque la solution (x, y, z) est primitive.
Donc a est pair, $x + a$ et $x' + a'$ sont impairs et $d' = 1$.

Si y et z sont impairs, alors $a = y + z$ est pair et x est pair.
Donc d est pair, $x' + a'$ est multiple de 4 et $d' = 4$.

Finalement d' est égal à 1 ou 4

On va étudier les deux cas.

Premier cas : $d' = 1$

$$\Delta = d^2 \cdot a'^2 \cdot \frac{a' - 3x'}{a' + x'}$$ est un carré d'entier.

Les nombres $a' - 3x'$ et $a' + x'$ sont impairs, premiers entre eux.

La fraction $\frac{a' - 3x'}{a' + x'}$ est le carré d'une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, avec m et n impairs.

$$\Delta = d^2 \cdot a'^2 \cdot \frac{m^2}{n^2}$$

En choisissant $d = n$ et $\Delta = a'^2 \cdot m^2$, on obtient une solution (x, y, z) primitive

$$\begin{cases} a' - 3x' = m^2 \\ a' + x' = n^2 \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} 4a' = 3n^2 + m^2 \\ 4x' = n^2 - m^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = \dfrac{(3n^2 + m^2) \cdot n}{4} \\ x = \dfrac{(n^2 - m^2) \cdot n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{n \cdot a' + \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{n \cdot a' + m \cdot a'}{2} = \dfrac{(3n^2 + m^2) \cdot (n + m)}{8} \\ z = \dfrac{n \cdot a' - \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{n \cdot a' - m \cdot a'}{2} = \dfrac{(3n^2 + m^2) \cdot (n - m)}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = x + y = \dfrac{(5n^2 + 2nm + m^2) \cdot (n - m)}{8} \\ c = x + z = \dfrac{(5n^2 - 2nm + m^2) \cdot (n + m)}{8} \end{cases}$$

$$h = b + c - a = \frac{(n^2 - m^2) \cdot n}{2}$$

Soit H le pied de la hauteur issue de A.

On remarque que : $\begin{cases} BH = \sqrt{c^2 - h^2} = \dfrac{(3n-m)\cdot(n+m)^2}{8} \\ CH = \sqrt{b^2 - h^2} = \dfrac{(3n+m)\cdot(n-m)^2}{8} \end{cases}$

Les longueurs BH et CH sont des entiers et le triangle ABC est la réunion de deux triangles pythagoriciens ABH et ACH.

Cas particulier : Pour $m = 1$ et $n = 5$, on retrouve l'exemple de la question 1.

Deuxième cas : $d' = 4$

$\Delta = d^2 \cdot a'^2 \cdot \dfrac{a' - 3x'}{a' + x'}$ est un carré d'entier.

Les nombres $\dfrac{a' - 3x'}{4}$ et $\dfrac{a' + x'}{4}$ sont premiers entre eux.

Leur rapport est le carré d'une fraction irréductible $\dfrac{m}{n}$

$$\Delta = d^2 \cdot a'^2 \cdot \frac{m^2}{n^2}$$

En choisissant $d = 2n$ et $\Delta = 4 \cdot a'^2 \cdot m^2$, on obtient une solution (x, y, z).

$\begin{cases} a' - 3x' = 4 \cdot m^2 \\ a' + x' = 4 \cdot n^2 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} a' = 3n^2 + m^2 \\ x' = n^2 - m^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} a = 2 \cdot (3n^2 + m^2) \cdot n \\ x = 2 \cdot (n^2 - m^2) \cdot n \end{cases}$

Pour que la solution (x, y, z) soit primitive, il faut que les entiers m et n soient de parités distinctes sinon on obtiendrait les octuples des solutions du premier cas.

$$\begin{cases} y = \dfrac{2n \cdot a' + \sqrt{\Delta}}{2} = n \cdot a' + m \cdot a' = (3n^2 + m^2) \cdot (n + m) \\ z = \dfrac{2n \cdot a' - \sqrt{\Delta}}{2} = n \cdot a' - m \cdot a' = (3n^2 + m^2) \cdot (n - m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = x + y = (5n^2 + 2nm + m^2) \cdot (n - m) \\ c = x + z = (5n^2 - 2nm + m^2) \cdot (n + m) \end{cases}$$

$$h = b + c - a = 4 \cdot (n^2 - m^2) \cdot n$$

Soit H le pied de la hauteur issue de A.

On remarque que : $\begin{cases} BH = \sqrt{c^2 - h^2} = (3n - m) \cdot (n + m)^2 \\ CH = \sqrt{b^2 - h^2} = (3n + m) \cdot (n - m)^2 \end{cases}$

Les longueurs BH et CH sont des entiers et le triangle ABC est la réunion de deux triangles pythagoriciens ABH et ACH.

Cas particulier : Pour $m = 0$ et $n = 1$, on obtient un triangle isocèle : $\begin{cases} b = c = 5 \\ a = 6 \end{cases}$