546-2 Pour bien finir 2022 et débuter 2023

Pour un nombre premier p divisant un entier n, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. (C'est la p-valuation de n).

La formule de Legendre donne :

$$v_p(n\,!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$$

(Le crochet désignant la partie entière)

Les facteurs premiers du dénominateur de la fraction de l'énoncé sont les nombres premiers inférieurs à 2022

Pour un tel nombre premier p, on note u le plus grand exposant k tels que : $p^k \leq 2022$

Alors : $$\alpha = v_p(2022\,!) = \sum_{k=1}^{u} \left[\frac{2022}{p^k}\right] \quad \text{et} \quad v_p\left((2022\,!)^{2023}\right) = 2023 \cdot \alpha$$

Et : $$v_p\left((2022^2)\,!\right) \geq \sum_{k=1}^{2u} \left[\frac{2022^2}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{u} \left[\frac{2022^2}{p^k}\right] + \sum_{k=u+1}^{2u} \left[\frac{2022^2}{p^k}\right]$$

Or : $$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{u} \left[\frac{2022^2}{p^k}\right] \geq 2022 \cdot \sum_{k=1}^{u} \left[\frac{2022}{p^k}\right] = 2022 \cdot \alpha \\ \displaystyle\sum_{k=u+1}^{2u} \left[\frac{2022^2}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{u} \left[\frac{2022^2}{p^u \cdot p^k}\right] \geq \sum_{k=1}^{u} \left[\frac{2022}{p^k}\right] = \alpha \end{cases}$$

Donc : $$v_p\left((2022^2)\,!\right) \geq \sum_{k=1}^{2u} \left[\frac{2022^2}{p^k}\right] \geq 2023 \cdot \alpha = v_p\left((2022\,!)^{2023}\right)$$

La fraction de l'énoncé est donc bien un entier.