546-4 Heptasection d'un triangle

L'utilisation de la géométrie analytique dans un repère cartésien serait lourde, mais les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C) donnent rapidement la solution.

Soient (x, y, z) les coordonnées barycentriques du point I

Comme le point I appartient à la droite (AM), on sait que : $y = 2z$

Comme le point I appartient à la droite (BN), on sait que : $z = 2x$

On en déduit les coordonnées de I, puis celles de J, K par permutation circulaire :

$$I \left| \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \right. \qquad J \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \right. \qquad K \left| \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

On choisit comme unité d'aire l'aire du triangle ABC.

L'aire S du triangle IJK est alors le déterminant dont les trois colonnes contiennent les coordonnées, de somme 1, des trois points I, J, K :

$$S = \frac{1}{7^3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{49}{7^3} = \frac{1}{7}$$