Une solution au problème 546-1

Pierre-Alain Sallard

27 février 2023

Rappel de l'énoncé : un triangle à côtés entiers est appelé *bien élévé* si la somme de deux de ses côtés est égale à la somme du troisième côté et de la hauteur relative à ce côté.

1. Montrer que le triangle $(95, 87, 68)$ est *bien élevé*.
2. Trouver tous les triangles *bien élevés*.

Notons (a, b, c) les longueurs d'un triangle (avec $a \geqslant b \geqslant c$ sans perte de généralités) et h la hauteur relative à a.
L'aire S du triangle s'écrit
— d'une part : $S = \frac{a \times h}{2}$
— et d'autre part, par la formule de Héron : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p = \frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre.
On en déduit une expression de la hauteur h en fonction de a, b et c :

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

1. Pour le triangle $(a = 95, b = 87, c = 68)$, on calcule alors que $h = 60$. Puisque $95+60 = 87+68$, le triangle en question vérifie donc bien la propriété caractéristique des triangles *bien élévés*.
2. On revient au cas général : un triangle (a, b, c) est *bien élévé* si et seulement si

$$a + \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = b + c$$

Avec un peu de calcul algébrique, et puisque tous les termes sont positifs, cette égalité est équivalente à

$$5a^3 - 3a^2(b+c) - (a+b+c)(b-c)^2 = 0$$

On remarque que le polynôme à trois indéterminées $P(X, Y, Z) = 5X^3 - 3X^2(Y+Z) - (X+Y+Z)(Y-Z)^2$ est homogène de degré 3 : ainsi, si un triplet (a, b, c) est solution de l'équation $P(a, b, c) = 0$, il en sera de même de tous les triplets de la forme (ka, kb, kc). Ceci aurait pû être énoncé dès le départ en remarquant qu'un triangle *bien élévé* est transformé par une homothétie de rapport entier en un autre triangle *bien élévé*.
En synthèse, on est ramené à rechercher tous les triplets d'entiers (a, b, c) tels que :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(a, b, c) = 1 & \text{(on dira que le triplet est alors primitif)} \\ a \geqslant b \geqslant c \quad \text{et } a \leqslant b + c & \text{(inégalité triangulaire)} \\ 5a^3 - 3a^2(b+c) - (a+b+c)(b-c)^2 = 0 \end{cases}$$

On peut alors lancer une recherche de solutions de cette équation diophantienne par un algorithme informatique (en annexe un programme écrit en Python).
Par exemple, on trouve 11 triplets *primitifs* pour des longueurs a inférieures à 500 sont : $(6, 5, 5)$, $(21, 20, 13)$, $(52, 51, 25)$, $(95, 87, 68)$, $(105, 104, 41)$, $(186, 185, 61)$, $(259, 232, 195)$, $(273, 265, 148)$, $(301, 300, 85)$, $(392, 365, 267)$ et $(456, 455, 113)$.

On constate empiriquement que, sur ces 11 triplets, 7 sont de la forme $(b+1, b, c)$, ce qui pourrait conduire à une recherche spécifique de tous les triplets-solutions de cette forme (non traité ici).

Programme en langage Python de recherche de solutions :

```
def pgcd(a,b) :
    if a%b == 0 :
        return b
    else :
        return pgcd(b, a%b)

def pgcd_3(a,b,c):
    return pgcd(a, pgcd(b,c))

seuil= 500
for b in range(1,seuil) :
    for c in range(1,b+1):
        for a in range(b, max(b+c,seuil)+1):
            if pgcd_3(a,b,c) ==1 and 5*a**3-3*a**2*(b+c)-(a+b+c)*(b-c)**2 == 0 :
                print(a,b,c)
```