Une solution au problème 546-2

Pierre-Alain Sallard

27 février 2023

Il s'agit de montrer que $\frac{(2022^2)\,!}{(2022\,!)^{2023}}$ est un entier, ce que l'on peut généraliser ainsi :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \frac{(N^2)\,!}{(N!)^{N+1}} \in \mathbb{N}$$

On fixe donc $N \in \mathbb{N}$ et on décompose $(N^2)\,!$ sous la forme

$$\begin{aligned}\left(N^2\right)! &= \left(1 \times 2 \times \cdots \times N\right) \times \left((N+1) \times \cdots \times (2 \times N)\right) \times \cdots \times \left(((N-1)N+1) \times \cdots \times (N \times N)\right)\\ &= \prod_{k=1}^{N} ((k-1)N+1) \times \cdots \times (kN) = \prod_{k=1}^{N} \prod_{j=(k-1)N+1}^{kN} j\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\displaystyle\prod_{j=(k-1)N+1}^{kN} j = (N!) \times \binom{kN}{N}$.

De plus, par la formule dite du capitaine, pour tout couple d'entiers (N, k), $N\binom{kN}{N} = kN\binom{kN-1}{N-1}$, ce qui se simplifie en $\binom{kN}{N} = k\binom{kN-1}{N-1}$.

On conclut donc que :

$$\begin{aligned}\left(N^2\right)! &= \prod_{k=1}^{N} \left[(N!) \times k \times \binom{kN-1}{N-1}\right]\\ &= \prod_{k=1}^{N} N! \times \prod_{k=1}^{N} k \times \prod_{k=1}^{N} \binom{kN-1}{N-1}\\ &= (N!)^N \times (N!) \times \prod_{k=1}^{N} \binom{kN-1}{N-1}\end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\frac{(N^2)\,!}{(N!)^{N+1}}$ est un nombre entier. CQFD.