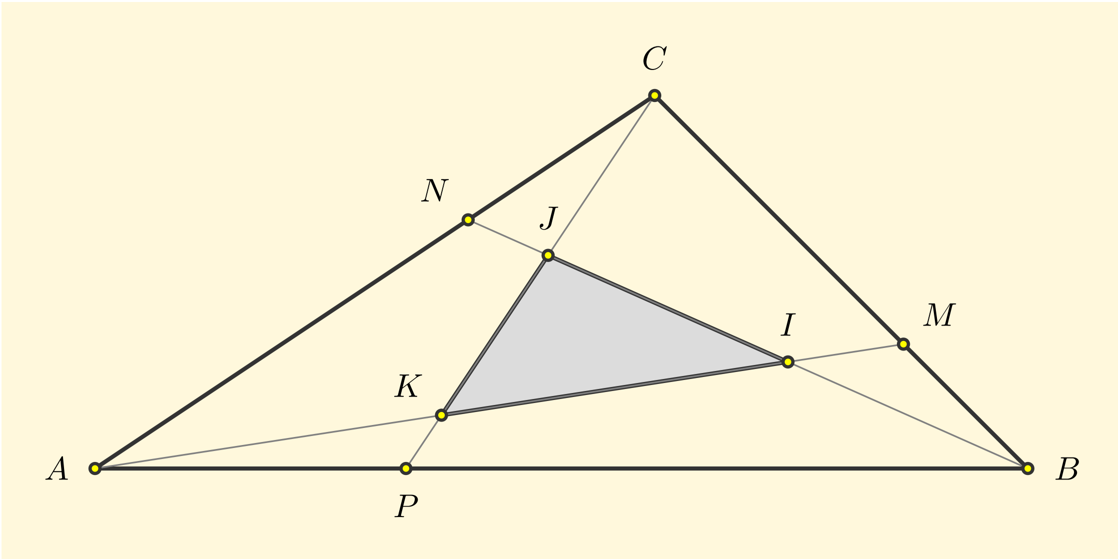
## Le problème posé

$ABC$ est un triangle quelconque, non aplati. $M$ est le barycentre de $(B,2)$ et de $(C,1)$ ; $N$ est le barycentre de $(C,2)$ et $(A,1)$ ; $P$ est le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$. Les droites $(AM)$ et $(BN)$ se coupent en $I$, $(BN)$ et $(CP)$ en $J$ ; $(CB)$ et $(AM)$ en $K$.

Il n'est pas trop compliqué d'établir que l'aire du triangle $IJK$ est égale au septième de l'aire du triangle $ABC$. Mais peut-on se passer de la géométrie analytique pour parvenir au résultat ?




## Une solution

Commençons par chercher les *poids* relatifs de $A$ et $M$ qui définissent $I$ comme leur barycentre. Partons du fait que $I$ est un barycentre de $A$, $B$ et $C$. Puisque que $I$ est aligné avec $A$ et $M$ (*resp.* aligné avec $B$ et $N$) ; le poids de $B$ est le double de celui de $C$ (*resp.* le poids de $C$ est le double de celui de $A$). Ainsi :

$$I \text{ est le barycentre de } \{(A,1),(B,4),(C,2)\}$$

d'où :

$$I \text{ est le barycentre de } \{(A,1),(M,6)\}$$

De la même façon on peut établir :

$$J \text{ est le barycentre de } \{(B,1),(N,6)\}$$

$$K \text{ est le barycentre de } \{(C,1),(P,6)\}$$

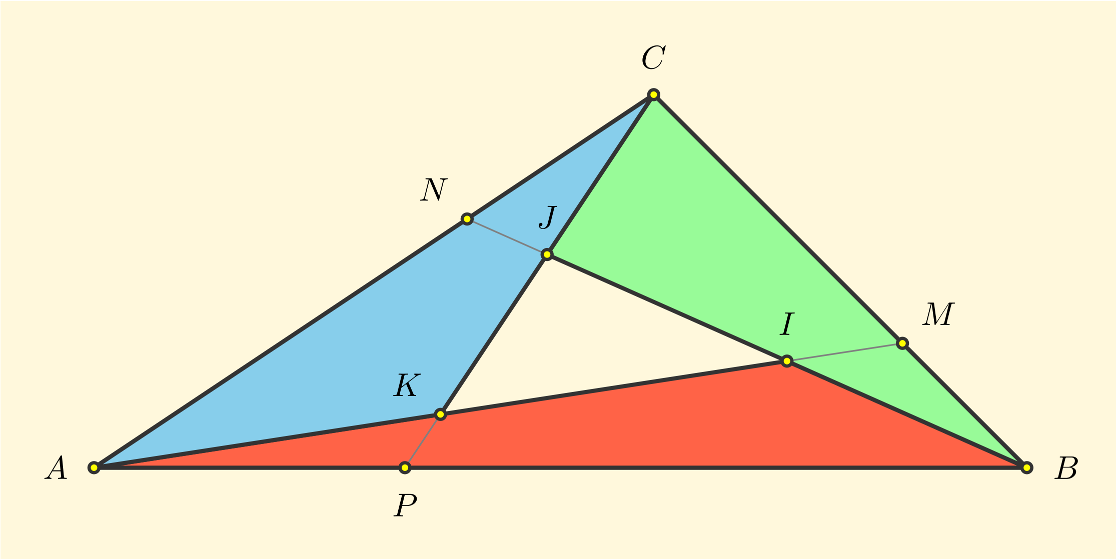
Maintenant, un petit lemme *immediat* : Si un point partage le côté d'un triangle dans un rapport donné alors le segment qui joint ce point au troisième sommet partage le triangle initial en deux triangles dont les aires sont dans le même rapport (la hauteur relative au côté divisé est commune).

Nous pouvons terminer la démonstration :

$$\mathscr{A}(AIB) = \frac{6}{7}\mathscr{A}(ABM) = \frac{6}{7} \times \frac{1}{3}\mathscr{A}(ABC) = \frac{2}{7}\mathscr{A}(ABC)$$

En réalité :

$$\mathscr{A}(AIB) = \mathscr{A}(BJC) = \mathscr{A}(CKA) = \frac{2}{7}\mathscr{A}(ABC)$$




Par soustraction, nous obtenons le résultat attendu :

$$\mathscr{A}(IJK) = \frac{1}{7}\mathscr{A}(ABC)$$

**Commentaire.** On peut envisager des variantes de ce problème en modifiant les coefficients des barycentres pris au départ de la construction, pas nécessairement les mêmes pour chaque couple de sommets.

*Jean-Michel Sarlat*
*Saint-Savin, le 18 décembre 2022*