546-3. Une extension de l'inégalité de Nesbitt

Soient a, b et c des réels strictement positifs. Montrer l'inégalite $\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Solution proposée par Marin Chirciu et Daniel Văcaru, Pitești, Roumanie.

On a
$$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} = \frac{ab\,(a-b) + ac\,(a-c)}{(b^2+c^2)\,(b+c)} \; (1)$$

et

$$\frac{b^2}{a^2+c^2} - \frac{b}{a+c} = \frac{b^2\,(a+c) - ba^2 - bc^2}{(a^2+c^2)\,(a+c)} = \frac{bc\,(b-c) + ba\,(b-a)}{(a^2+c^2)\,(a+c)} \; (2)$$

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} = \frac{ca\,(c-a) + cb\,(c-b)}{(a^2+b^2)\,(a+b)} \; (3)$$

Nous obtenons

$$\sum \frac{a^2}{b^2+c^2} - \sum \frac{a}{b+c} = \sum bc\,(b-c) \left[\frac{1}{(c^2+a^2)\,(c+a)} - \frac{1}{(a^2+b^2)\,(a+b)} \right] =$$

$$\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right) \sum \frac{bc\,(b-c)^2}{(a^2+b^2)\,(a^2+c^2)\,(a+b)\,(a+c)} \geq 0$$

L'égalité se produit lorsque $a = b = c$.

L'inégalité est apparue pour la première fois dans le Gazeta Matematică (en Roumain) no. 1/2003, sous la signature de l'enseignant Vasile Cârtoaje, Ploiești