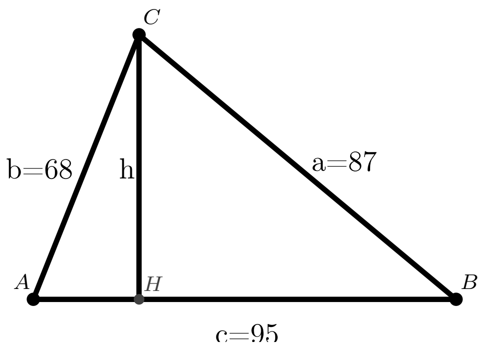
546-1 Un triangle bien élevé



Un triangle à côtés entiers est bien "élevé" si la somme de deux de ses côtés est égale à la somme du troisième côté et de la hauteur relative à ce côté.

1°) Vérifier que le triangle ci-contre est un triangle bien élevé

2°)Trouver tous les triangles bien élevés.

1°) Le triangle ABC est à côtés entiers .
Calculons la hauteur h.
D'après la formule de Héron d'Alexandrie , l'aire du triangle ABC est égale à :

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c}$ où p est le demi-périmètre du triangle ABC. $p = \frac{68+87+95}{2} = \frac{250}{2} = 125$

$\mathcal{A} = \sqrt{125(125-87)(125-68)(125-95} = \sqrt{8122500} = 2850$

$\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2}$ donc $h = \frac{2 \times \mathcal{A}}{c} = \frac{2 \times 2850}{95} = 60$
$a + b = 87 + 68 = 155$ et $c + h = 95 + 60 = 155$; $a + b = c + h$
donc le triangle ABC est un triangle bien élevé.

2°) Soit ABC un triangle bien "élevé" , on note $AC = b$, $BC = a$ et $AB = c$
vérifiant : $a + b = c + h$ où $h = CH$ est la hauteur relative à $[AB]$

Montrons que h , AH et HB sont des entiers naturels.
a, b et c sont des entiers , il résulte de l'égalité $a + b = c + h$ que h est un entier.
Montrons que HA et HB sont aussi des entiers naturels.
D'après la formule d'Al Kaschi :$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\widehat{A})$

$AH = bcos(\widehat{A})$ donc $a^2 = b^2 + c^2 - 2cAH$ d'où $AH = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} = \frac{p}{q}$
en posant $p = b^2 + c^2 - a^2$ et $q = 2c$

$AH \in \mathbb{Q}$ car $p \in \mathcal{N}$ et $q \in \mathcal{N}^*$

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle AHC , on déduit $AH^2 = b^2 - h^2$ et b et h étant des entiers ,AH^2 est un entier.
Posons $AH^2 = n$,on en déduit que $n = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = n \times q^2$,
comme n , p et q sont des entiers naturels , en utilisant la décomposition en facteurs premiers et l'unicité de la décomposition de n , p et q on montre l'existence d'un entier n' tel que $n = n'^2$, car $p^2 = n \times q^2$
on déduit alors que $p = n'q \Leftrightarrow \frac{p}{q} = n'$ donc $HA = n'$ est un entier naturel.
Comme $HB = c - HA$, HB est aussi un entier naturel.

Les triangles AHC et CHB sont des triangles rectangles dont les côtés sont des entiers ,
il existe donc des entiers naturels u et v tels que :
$u > v$, $b = u^2 + v^2$, $h = 2uv$ et $AH = u^2 - v^2$ ou $b = u^2 + v^2$, $h = u^2 - v^2$ et $AH = 2uv$ et
des entiers k , u' et v' tels que $a = k(u'^2 + v'^2)$, $h = k(2u'v')$ et $HB = k(u'^2 - v'^2)$
ou $a = k(u'^2 + v'^2)$, $h = k(u'^2 - v'^2)$ et $HB = k(2u'v')$

Pour le triangle de la question 1°),
$b = 68 = 64 + 4 = 8^2 + 2^2$, $h = 60 = 64 - 4 = 8^2 - 2^2$ et $AH = 32 = 2 \times 8 \times 2$, $u = 8$ et $v = 2$
$a = 87 = 3 \times 29 = 3(5^2 + 2^2) \quad h = 3(2 \times 5 \times 2) \quad$ et $HB = 63 = 3 \times 21 = 3(5^2 - 2^2)$

$k = 3$, $u' = 5$ et $v' = 2$ on a $h = u^2 - v^2 = k(2u'v')$

Pour qu'un triangle ABC soit bien élevé , il faut que les longueurs de ses côtés et de sa hauteur soient des entiers naturels .Il faut donc qu'il existe des couples d'entiers (u, v) et (u', v') vérifiant les égalités ci-dessus d'une part ,et d'autre part il faut que les couples (u, v) et (u', v') soient tels que l'égalité $a + b = c + h$ soit satisfaite.

1ème cas : Déterminons les triangles ABC bien élevés tels que $b = u^2 + v^2 \quad h = u^2 - v^2 = k2u'v'$, $AH = 2uv$.$a = k(u'^2 + v'^2)$, $HB = k(u'^2 - v'^2)$,et $c = 2uv + k(u'^2 - v'^2)$

Déterminer les triangles ABC bien élevés , cela revient à déterminer les couples (u, v) d'entiers tels que $a + b = c + h$.
$a + b = c + h \Leftrightarrow u^2 + v^2 + k(u'^2 + v'^2) = 2uv + k(u'^2 - v'^2) + u^2 - v^2 \quad \Leftrightarrow$
$2v^2 - 2uv = k(-2v'^2) \Leftrightarrow \quad v(u - v) = kv'^2$

Soit un couple d'entiers naturels (u, v) tel que $u > v$, $b = u^2 + v^2$, $h = u^2 - v^2$ et $AH = 2uv$.

A partir de ce couple (u, v) , déterminons les entiers k , u' et v' satisfaisant aux égalités ci-dessus.

En décomposant en facteurs premiers de $v(u - v)$, on détermine les entiers k et v' tels que $v(u - v) = kv'^2$ où k est l' entier dont la décomposition en facteurs premiers ne contient pas de carrés.

Pour déterminer u' ,on utilise l'égalité $h = u^2 - v^2 = k2u'v'$
$u' = \frac{u^2-v^2}{2kv'}$ si $2kv'$ **divise** $u^2 - v^2$

On peut alors exprimer a et c en fonction de u et v :

$a = k(u'^2 + v'^2) = ku'^2 + kv'^2 = k\left[\frac{(u+v)^2(u-v)^2}{4k^2v'^2}\right] + kv'^2 = \left[\frac{(u+v)^2(u-v)^2}{4kv'^2}\right] + kv'^2$
$a = \left[\frac{(u+v)^2(u-v)^2}{4v(u-v}\right] + v(u - v) = \frac{(u+v)^2(u-v)}{4v} + v(u - v) = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2+4v^2}{4v}\right)$
$HB = k(u'^2 - v'^2) = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2-4v^2}{4v}\right] = (u - v)\frac{(u+3v)(u-v)}{4v} = \frac{(u-v)^2(u+3v)}{4v}$

$c = AH + HB = 2uv + \frac{(u-v)^2(u+3v)}{4v}$ ou $c = AH + HB = 2uv + (u - v)\frac{(u+v)^2-4v^2}{4v}$
Donc pour tout couple (u, v) d'entiers naturels tels que $u > v$, $v(u - v) = kv'^2$ où k est un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers ne contient pas de carrés,et tels que $2kv'$ divise $u^2 - v^2$, le triangle ABC déterminé par $BC = a = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2+4v^2}{4v}\right]$,
$AC = b = u^2 + v^2$ $AB = c = 2uv + (u - v)\frac{(u+v)^2-4v^2}{4v}$ et de hauteur $AH = h = u^2 - v^2$

est un triangle dont les côtés sont des entiers et vérifient $a + b = c + h$, en effet

$a + b = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2+4v^2}{4v}\right) + u^2 + v^2 = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2}{4v}\right] + (u - v)v + u^2 + v^2$
$a + b = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2}{4v}\right] + uv + u^2$

$c + h = 2uv + (u - v)\frac{(u+v)^2-4v^2}{4v} + u^2 - v^2 = 2uv + (u - v)\left[\frac{(u+v)^2}{4v}\right] - v(u - v) + u^2 - v^2$
$c + h = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2}{4v}\right] + 2uv - uv + v^2 + u^2 - v^2 = (u - v)\left[\frac{(u+v)^2}{4v}\right] + uv + u^2$
Le triangle ABC est donc un triangle bien élevé.

de plus à partir de ce couple (u, v) on trouve une infinité de triangles bien élevés puisque les couples (du, dv) , $d \in \mathbb{N}$,permettent chacun de trouver un triangle bien élevé car toutes les longueurs sont multipliées par d^2.

Exemple :
Dans le cas du triangle de la 1ère question où $u = 8$, $v = 2$.
$v(u - v) = 2 \times 6 = 12 = 3 \times 2^2$ donc $k = 3$ et $v' = 2$.
$2kv' = 2 \times 6 = 12$ et $u^2 - v^2 = h = 60$, $2kv'$ divise $u^2 - v^2$ $u' = \frac{60}{12} = 5$
Le couple $(u, v) = (8, 2)$ permet de trouver le triangle bien élevé de la 1ère question ,de plus il permet de

trouver une infinité de triangles bien élevés .
Plus généralement on peut démontrer que si u et v sont des nombres pairs et si $u = Kv$ où K est un entier naturel non nul, le couple (u, v) détermine un triangle bien élevé .

2ème cas : Déterminons les triangles ABC bien élevés tels que

$b = u^2 + v^2$,$h = 2uv = k2u'v'$ et $AH = u^2 - v^2$.

$a = k(u'^2 + v'^2)$ $HB = k(u'^2 - v'^2)$ $c = AH + HB$

Déterminer les triangles ABC bien élevés , cela revient à déterminer les couples (u, v) d'entiers tels que $a + b = c + h$.

$a + b = c + h \Leftrightarrow u^2 + v^2 + k(u'^2 + v'^2) = u^2 - v^2 + k(u'^2 - v'^2) + 2uv \quad \Leftrightarrow \quad v(u - v) = kv'^2$

Soit un couple d'entiers naturels (u, v) tel que $u > v$, $b = u^2 + v^2$, $h = 2uv$ et $AH = u^2 - v^2$.

A partir de ce couple (u, v) , déterminons les entiers k , u' et v' satisfaisant aux égalités ci-dessus.

En décomposant en facteurs premiers $v(u - v)$, on détermine alors les entiers

k et v' tels que k est un entier dont la décomposition en facteurs premiers ne contient pas de carrés.

De l'égalité $h = 2uv = k \times 2u'v'$, on obtient $u' = \frac{uv}{kv'}$ si kv' divise uv

On peut obtenir a et c en fonction de u et v.

$a = k(u'^2 + v'^2) = k\left[\left(\frac{uv}{kv'}\right)^2 + v'^2\right] = \frac{u^2v^2}{kv'^2} + kv'^2 = \frac{u^2v}{(u-v)} + v(u - v) = v\left[\frac{u^2}{u-v} + u - v\right]$

$BH = k(u'^2 - v'^2) = v\left[\frac{u^2}{u-v} - (u - v)\right]$

$c = AH + BH = u^2 - v^2 + v\left[\frac{u^2}{u-v} - (u - v)\right] = u^2 - v^2 + \frac{vu^2}{u-v} - uv + v^2 = \frac{vu^2}{u-v} + u^2 - uv$

Donc pour tout couple (u, v) d'entiers naturels tels que $u > v$, $v(u - v) = kv'^2$ où k est un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers ne contient pas de carrés et tels que kv' divise uv , le triangle ABC déterminé par $BC = a = v\left[\frac{u^2}{u-v} + u - v\right]$, $AC = b = u^2 + v^2$
$AB = c = u(u + v) + \frac{vu^2}{u-v}$ et de hauteur $AH = h = u^2 - v^2$

est un triangle dont les côtés sont des entiers et vérifient $a + b = c + h$, en effet

$a + b == v\left[\frac{u^2}{u-v} + u - v\right] + u^2 + v^2 = \frac{vu^2}{u-v} + vu - v^2 + u^2 + v^2 = \frac{vu^2}{u-v} + vu + u^2$
$c + h = \frac{vu^2}{u-v} + u^2 - uv + 2uv = \frac{vu^2}{u-v} + u^2 + uv$ donc $a + b = c + h$,
Le triangle ABC est donc un triangle bien élevé.

D'autre part, les couples (du, dv) où d est un entier non nul déterminent des triangles bien élevés aussi.

Exemple : Montrons que le couple $(u, v) = (4, 3)$ convient.
Pour $u = 4$, $v = 3$ $\quad v(u - v) = 3 \times (4 - 3) = 3$ donc $k = 3$ et $v' = 1$.

$kv' = 3$, $uv = 12$ on a kv' divise uv , on obtient $u' = \frac{uv}{kv'} = \frac{12}{3} = 4$

Le couple $(u, v) = (4, 3)$ définit le triangle ABC tel que
$b = BC = u^2 + v^2 = 16 + 9 = 25$, $h = CH = 2uv = 24$, $AH = u^2 - v^2 = 7$
$a = BC = k(u'^2 + v'^2) = v\left[\frac{u^2}{u-v} + u - v\right] = 3(16 + 4 - 3) = 3 \times 17 = 51$

$BH = \frac{v^2(2u-v)}{u-v} = \frac{9\times5}{1} = 45 \quad c = AH + BH = 7 + 45 = 52$

$a + b = 51 + 25 = 76$ et $c + h = 52 + 24 = 76$

ABC est donc un triangle bien élevé et tout couple de la forme $(4d, 3d)$ où d est un entier naturel non nul permet de trouver un triangle bien élevé dont les côtés ont pour longueur $a = 51 \times d^2$
$b = 25 \times d^2$, $c = 52 \times d^2$ et de hauteur $h = 24 \times d^2$

On peut démontrer que tout couple de la forme $(n+1, n)$ où n est un entier naturel non nul détermine un triangle bien élevé.

3ème cas Déterminons les triangles ABC bien élevés tels que
$b = AC = u^2 + v^2$, $CH = h = u^2 - v^2 = k(u'^2 - v'^2)$ et $AH = 2uv$

$a = BC == k(u'^2 + v'^2)$, $HB = k(2u'v')$, $c = AH + HB$
L'égalité $a + b = c + h$ est équivalente à

$$u^2 + v^2 + k(u'^2 + v'^2) = 2uv + k(2u'v') + u^2 - v^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2v(u-v) = k(u'-v')^2$$

Soit un couple d'entiers naturels (u, v) tel que $u > v$, $b = u^2 + v^2$, $h = u^2 - v^2$ et $AH = 2uv$.

A partir de ce couple (u, v) , déterminons les entiers k , u' et v' satisfaisant aux égalités ci-dessus.

En décomposant en facteurs premiers de $2v(u-v)$, on détermine les entiers k et $u' - v'$ tels que $2v(u-v) = k(u'-v')^2$ où k est l' entier dont la décomposition en facteurs premiers ne contient pas de carrés.

Notons $V' = u' - v'$

$$h = u^2 - v^2 = k(u'^2 - v'^2) = k(u'+v')(u'-v') = k(u'+v')V'$$

Si kV' divise h alors $u' + v' = \frac{u^2-v^2}{kV'}$

en ajoutant $u + v$ et $u' - v'$, on obtient :

$$u' = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2-v^2}{kV'} + V'\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2-v^2+kV'^2}{kV'}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{u^2-v^2+2v(u-v)}{kV'}\right] \; u' = \frac{1}{2}\left[\frac{(u-v)(u+3v)}{kV'}\right]$$

Comme $v' = u' - V'$, on obtient alors $v' = \frac{1}{2}\left[\frac{(u-v)^2}{kV'}\right]$

Déterminons a et c en fonction de u et de v

$$a = k(u'^2 + v'^2)$$
$$a = k\left[\frac{(u-v)^2(u+3v)^2}{4k^2V'^2} + \frac{(u-v)^4}{4k^2V'^2}\right] = \frac{1}{4}(u-v)^2\left[\frac{2u^2+4uv+10v^2}{kV'^2}\right) = \frac{1}{4}(u-v)^2\left[\frac{2u^2+4uv+10v^2}{2v(u-v)}\right)$$
$$a = (u-v)\left[\frac{u^2+2uv+5v^2}{4v}\right) = (u-v)\left[\frac{(u+v)^2+4v^2}{4v}\right]$$

$$c = AH + HB = 2uv + 2ku'v' = 2uv + \frac{(u-v)^3(u+3v)}{2kV'^2} = 2uv + \frac{(u-v)^3(u+3v)}{4v(u-v)}$$
$$c = 2uv + \frac{(u-v)^2(u+3v)}{4v}$$

Comme les valeurs de a , b , c et h sont les mêmes que dans le 1er cas l'égalité $a + b = c + h$ est satisfaite

Donc pour tout couple (u, v) d'entiers naturels tels que $u > v$, $2v(u-v) = kV'^2$ où k est un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers ne contient pas de carrés,et tels que kV' divise $h = u^2 - v^2$, le triangle ABC déterminé par $BC = a = (u-v)\left[\frac{u^2+2uv+5v^2}{4v}\right)$, $AC = b = u^2 + v^2$ $AB = c = 2uv + \frac{(u-v)^2(u+3v)}{4v}$ et de hauteur $CH = h = u^2 - v^2$

est un triangle dont les côtés sont des entiers et vérifient l'égalité $a + b = c + h$

le triangle ABC est donc un triangle bien élevé.

Exemple :
$u = 12$, $v = 8$, $h = u^2 - v^2 = 80$
$2v(u-v) = 16 \times 4 = 64 = 8^2$ $k = 1$ et $V' = u' - v' = 8$
$kV' = 8$ donc kV' divise h donc le triangle ABC ayant pour côtés a , b et c et de hauteur h est un triangle bien élevé.
On a $b = 208$, $h = 80$,$a = 82$ et $c = 210$.
$a + b = c + h = 290$